

# **Tópicos en Teoría de los Juegos**

**Universidad del CEMA  
Buenos Aires, Agosto de 2008**

Gustavo Torrens  
Department of Economics  
Washington University in St. Louis

## 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

### Referencias

Las transparencias del tópico 4 siguen el capítulo 12 del libro “*A course in Game Theory*” de Osborne y Rubinstein (1994). La mayor parte de las definiciones y el aparato formal son los empleados por Osborne y Rubinstein. Algunos ejemplos son de Fudenberg y Tirole (1992) y de las notas de clases de Levine (otoño 2008).

# 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

## I. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas forma normal

Existen 3 definiciones alternativas todas equivalentes

**Definición 1:** Un perfil de estrategias  $\sigma$  en un juego en forma normal es un equilibrio con manos temblorosas si existe una sucesión de perfiles de estrategias completamente mixtas  $\{\sigma^n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\sigma^n \rightarrow \sigma$  y para cada  $l \in N$   $\sigma_l$  es una mejor respuesta a  $\sigma_{-l}^n$ .

**Definición 2:** Un equilibrio  $\varepsilon$ -restringido de un juego en forma normal es un perfil de estrategias totalmente mixtas  $\sigma^\varepsilon$  tal que, para cada  $l \in N$   $\sigma_l^\varepsilon$  soluciona  $\max_{\sigma_l} u_l(\sigma_l, \sigma_{-l}^\varepsilon)$  sujeto a  $\sigma_l^\varepsilon(s_l) \geq \varepsilon(s_l)$  para todo  $s_l \in S_l$ , para algún  $\{\varepsilon(s_l)\}_{s_l \in S_l, l \in N}$ , donde  $0 < \varepsilon(s_l) < 1$ . Un equilibrio en manos temblorosas es cualquier límite de equilibrios  $\varepsilon$ -restringidos cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

**Definición 3:** Un perfil de estrategias en un juego en forma normal es un equilibrio  $\varepsilon$ -perfecto si es completamente mixto y, para todo  $l \in N$  y  $s_l \in S_l$ , si existe  $s'_l$  con  $u_l(s'_l, \sigma_{-l}^\varepsilon) > u_l(s_l, \sigma_{-l}^\varepsilon)$  entonces  $\sigma_l^\varepsilon(s_l) < \varepsilon$ . Un equilibrio en manos temblorosas es cualquier límite de equilibrios  $\varepsilon$ -perfectos para alguna sucesión de  $\varepsilon$  estrictamente positivos que tienda a cero.

**Lema 1:** las 3 definiciones anteriores son equivalentes.

# 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

**Focalicemos nuestra atención en la definición 1.**

**Definición 1:** Un perfil de estrategias  $\sigma$  en un juego en forma normal es un equilibrio con manos temblorosas si existe una sucesión de perfiles de estrategias completamente mixtas  $\{\sigma^n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\sigma^n \rightarrow \sigma$  y para cada  $i \in N$   $\sigma_i$  es una mejor respuesta a  $\sigma_{-i}^n$ .

**Nota 1:** Notemos que la definición solamente requiere que la estrategia de cada jugador sea una mejor respuesta a **alguna** sucesión de perfiles de estrategias perturbadas in las cuales la probabilidad de error converge a cero; es decir **no necesariamente a todas estas sucesiones**.

**Nota 2:** Las estrategias de todos los jugadores deben ser una mejor respuesta a la misma sucesión de perfiles de estrategias.

**Lema 2:** En todo juego en forma normal si  $\sigma$  es un equilibrio en manos temblorosas, entonces  $\sigma$  es un equilibrio de Nash.

**Demostración:** idea básica la utilidad esperada de cada jugador es una función continua de las estrategias de sus rivales.

## 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

**Ejemplo 1 (Osborne y Rubinstein página 248):** computemos los equilibrios en manos temblorosas empleando directamente la definición. Vemos que no todos los equilibrios de Nash son Equilibrios en manos temblorosas.

## 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

### Estrategias débilmente dominadas y Equilibrio en Perfecto en Manos Temblorosas.

La noción de equilibrio de Nash no elimina las estrategias débilmente dominadas. En efecto en el juego anterior teníamos equilibrio de Nash en los cuales al menos un jugador estaba empleando una estrategia débilmente dominada.

Sin embargo, la noción de equilibrio perfecto en manos temblorosas elimina el uso de estrategias débilmente dominadas. La razón es que una estrategia débilmente dominada nunca puede ser una mejor respuesta a un perfil de estrategias completamente mixtas. Es decir:

**Lema 3:** Si el perfil de estrategias  $\sigma$  es un equilibrio perfecto en manos temblorosas, entonces para todo  $i \in N$   $\sigma_i$  no puede ser una estrategia débilmente dominada.

Para juegos con dos jugadores tenemos un resultado aun más fuerte

**Proposición 1:** Un perfil de estrategias en un juego finito en forma normal con 2 jugadores es un equilibrio perfecto en manos temblorosas si y solo si es un equilibrio de Nash y la estrategia de ningún jugador es débilmente dominada.

# 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

## Existencia de Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas

**Teorema 1:** Todo juego en forma normal finito tiene un equilibrio perfecto con manos temblorosas.

# 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

## II. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas forma extensiva

**Ejemplo 2 (Osborne y Rubinstein 1994 pagina 250):**

Problemas al intentar extender la idea de manos temblorosa a juegos extensivos en forma directa.

El problema fundamental es que cada jugador considera errores en su estrategia, pero no errores al implementar la estrategia.



# 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

**Forma Agente Estratégica/Normal:** imaginemos que cada jugador es partido en agentes, uno por cada conjunto de información y que cada agente de un jugador tiene las mismas preferencias que el jugador.

**Nota 3:** cada perfil de estrategias mixtas en el juego en forma agente estratégica corresponde a un perfil de estrategias de comportamiento en el juego en forma extensiva.

**Definición 4:** Un equilibrio perfecto con manos temblorosas de un juego en forma extensiva finito es un equilibrio perfecto con manos temblorosas de la correspondiente forma agente del juego.

Repensemos ahora el ejemplo 2 (Osborne y Rubinstein pagina 250) pero aplicando la noción de equilibrio perfecto con manos temblorosas para juegos en forma extensiva.

# 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

## Existencia de equilibrio perfecto en manos temblorosas forma extensiva

**Teorema 2:** Todo juego en forma extensiva finito tiene un equilibrio perfecto con manos temblorosas forma extensiva.

**Demostración:** empleando la definición de equilibrio perfecto en manos temblorosas forma extensiva este teorema es simplemente un corolario del teorema de existencia de equilibrio perfecto con manos temblorosas forma normal.

# 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

## III. a. Conexión entre equilibrio perfecto en subjuegos y equilibrio perfecto en manos temblorosas forma normal

**Idea fundamental:** los dos conceptos se superponen

**Ejemplo 3 (notas de clase Levine otoño 2008):** Un juego con un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que no es perfecto en manos temblorosas.

**Ejemplo 4 (notas de clases Levine otoño 2008):** Un juego con un equilibrio perfecto en manos temblorosas que no es Nash perfecto en subjuegos.

# 4. Equilibrio Perfecto con Manos Temblorosas (Trembling Hand Perfect Equilibrium)

## III. b. Conexión entre equilibrio secuencial y equilibrio perfecto en manos temblorosas forma extensiva

**Idea fundamental:** ambos conceptos están muy cerquita, pero equilibrio perfecto en manos temblorosas forma extensiva es más fuerte.

**Proposición 2:** Para todo equilibrio perfecto en manos temblorosas forma extensiva  $\beta$  de un juego en forma extensiva finito, existe un sistema de creencias  $\mu$  tal que  $(\beta, \mu)$  es un equilibrio secuencial del juego.

Intuitivamente: ¿Por qué manos temblorosas es más fuerte?

**Idea:** Observemos que manos temblorosas exige que la estrategia de cada jugador sea una mejor respuesta para alguna sucesión de perturbaciones del perfil de estrategias, mientras que el equilibrio secuencial solamente exige que las creencias se obtengan de una sucesión de perturbaciones del perfil de estrategias.