UNIVERSIDAD DEL CEMA

DISTRIBUCIÓN NEUTRAL AL RIESGO IMPLÍCITA EN EL MERCADO DE OPCIONES

- TEORÍA Y APLICACIONES EN EL MERCADO LOCAL -

AUTOR: Marcelo F. Perillo

Firma del Autor:

TUTOR: Sergio Pernice

Firma del Tutor:

Febrero, 2006

DISTRIBUCIÓN NEUTRAL AL RIESGO IMPLÍCITA EN EL MERCADO DE OPCIONES

- TEORÍA Y APLICACIONES EN EL MERCADO LOCAL -

Marcelo F. Perillo

Resumen

En los últimos años se ha expandido rápidamente una línea de investigación basada en la utilización de los precios de las opciones para obtener la función de densidad neutral al riesgo del activo subyacente. El conocimiento de dicha densidad podría resultar de utilidad para múltiples propósitos, tales como la valuación de instrumentos exóticos o ilíquidos, la ejecución de operaciones de arbitraje y la cobertura de riesgos. La posible riqueza de su contenido informativo ha contribuido también a alentar expectativas sobre su ventajosa aplicación al diseño de mejores políticas económicas y monetarias. Bancos centrales de diversos países han mostrado un claro interés, manteniendo una activa participación en esta área de investigación.

Luego de una reseña de sus fundamentos teóricos, relevancia empírica, metodologías empleadas y de la literatura relacionada, ofrecemos diversas aplicaciones de este conocimiento en el mercado de opciones local.

I. Introducción

Con posterioridad al trabajo de Black, Merton y Scholes, la teoría de valuación de opciones ha constituido un campo de activa investigación. Ello posibilitó avances considerables en el desarrollo y comprensión de la tecnología de valuación y cobertura de instrumentos financieros derivados.

Más recientemente se han iniciado otras líneas de investigación, menos conocidas, cuyo objetivo está centrado en la utilización del mercado de opciones, para extraer información relevante sobre el activo subyacente. En esta dirección se encuentran comprendidos aquellos trabajos orientados a analizar el contenido informativo de la volatilidad implícita en los precios de las opciones y su capacidad de predicción respecto de otras metodologías basadas en el análisis de series de tiempo, esto es en información histórica. Más ambicioso que ello resulta el propósito de obtener, no sólo información sobre un momento de la distribución del precio del subyacente, como la volatilidad, sino la función de densidad del subyacente que permite caracterizar completamente su comportamiento, propósito que abordamos en el presente trabajo.

La exposición que sigue se divide en cinco secciones. La sección II constituye una revisión de la teoría de valuación de opciones y de los fundamentos teóricos del tema del presente trabajo. La sección III ofrece una breve reseña de la relevancia práctica, las potenciales aplicaciones de la información provista por el mercado de opciones y de la literatura sobre el particular. La sección IV constituye una limitada revisión de las metodologías existentes y de la literatura correspondiente. La sección V desarrolla y presenta los resultados de las aplicaciones al mercado local. Finalmente, la sección VI es dedicada a las conclusiones del trabajo.

II. Fundamentos Teóricos

Un instrumento financiero derivado es un activo cuyo valor se deriva del valor de otro, conocido comúnmente como subyacente.

En 1973 Black, Merton y Scholes resolvieron exitosamente el problema de valuación de un tipo particular de instrumento financiero derivado, cual es la opción europea sobre un activo que no distribuye dividendos. Bajo argumentos de arbitraje los autores derivaron la conocida ecuación diferencial que lleva sus nombres:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{1}$$

La solución de la ecuación diferencial depende de las condiciones de frontera del derivado particular que se trate. En el caso de una opción europea de compra una condición de frontera importante está dada por su función de pago al vencimiento, esto es:

$$f = \max(S_T - X, 0) = (S_T - X)^+ \tag{2}$$

Sin embargo, no es esta metodología, basada en la resolución de ecuaciones diferenciales (Differential Approach o Physicist Approach), la actualmente predominante en la literatura. Los trabajos de Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981) dieron origen a lo que se conoce como la metodología probabilística (Probabilistic Approach) de valuación, sustentada en la riqueza teórica de la teoría de probabilidades en general y la teoría de martingalas en particular. Estos trabajos se han convertido en una referencia corriente en el desarrollo posterior y el estadio actual de la tecnología para la valuación de opciones y la valuación libre de arbitraje. Como lo señala Ross (1989), el trabajo de Harrison y Kreps ha permitido unificar dos líneas de investigación divergentes en la teoría de valuación intertemporal: la valuación libre de arbitraje y la valuación de opciones.

Los autores anteriormente mencionados demostraron que en ausencia de oportunidades de arbitraje, y bajo ciertas condiciones de regularidad atribuidas a los procesos estocásticos que satisfacen los precios de los activos, existe una medida de martingala equivalente, esto es una medida de probabilidad, equivalente a la "medida de probabilidad real", bajo la cual el precio de los activos descontado a la tasa de interés libre de riesgo constituye una martingala. A dicha medida de probabilidad se la conoce también como "Probabilidad Neutral al Riesgo".

Conforme a ese resultado, que suele citarse en la literatura como el "Primer Teorema Fundamental de Finanzas", el precio de un activo puede expresarse como:

$$S_t = e^{-r(T-t)} E^Q (S_T) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} S_T f_Q (S_T) dS_T \tag{3}$$

donde hemos representado por Q a la probabilidad neutral al riesgo para distinguirla de la probabilidad "real", P.

La existencia de Q depende sólo de la inexistencia de oportunidades de arbitraje, pero ello no permite descartar la posible existencia de varias medidas de probabilidad compatibles con la inexistencia de oportunidades de arbitraje. Esto es, la inexistencia de oportunidades de arbitraje no permite asegurar el carácter único de Q.

Este último punto constituye el tema del "Segundo Teorema Fundamental de Finanzas" que sostiene que en presencia de mercados completos la medida de probabilidad Q es única.

Bajo esta metodología probabilística podemos representar al precio libre de arbitraje de una opción de compra europea de la siguiente forma:

$$c(X,\tau) = e^{-r\tau} E^Q \left[(S_T - X)^+ \right] = e^{-r\tau} \int_X^{\infty} (S_T - X) f_Q (S_T) dS_T \tag{4}$$

La manipulación de (4) nos brinda la expresión conocida:

$$c = SN\left(d_1\right) - Xe^{-r\tau} N\left(d_2\right)$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{S}{X}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \qquad (5)$$

Poco comprendido en un principio el vínculo entre ambas metodologías y la equivalencia de las representaciones (1) y (4), la respuesta puede encontrarse en el Teorema de Feynman-Kac, al constituir la ecuación diferencial de Black, Merton y Scholes un caso especial del resultado de dicho teorema.

La densidad de la medida de probabilidad neutral al riesgo o medida de martingala equivalente recibió también otras denominaciones en la literatura, tales como Densidad de Precios Estado, Pricing Kernel o Factor de Descuento Estocástico, todas ellas equivalentes bajo el supuesto de mercados completos.

Estas últimas denominaciones y representaciones tienen una relevancia teórica significativa, pues habilitan nuevas perspectivas al significado de la medida de probabilidad neutral al riesgo. Desde un punto de vista económico la medida de probabilidad Q está relacionada con los precios de los estados de la naturaleza o Precios Arrow-Debreu. Desde este enfoque el trabajo de Harrison y Kreps constituye una extensión, a tiempo y estados continuos, del modelo de Arrow-Debreu. Apelaremos en nuestro trabajo a esta representación para obtener la densidad “real” del subyacente a partir de su densidad neutral al riesgo.

Stephen Ross (1973 y 1978) formula, por su parte, una representación alternativa de las brindadas anteriormente. En su trabajo la inexistencia de oportunidades de arbitraje resulta caracterizada por la existencia de un operador de valuación lineal estrictamente positivo. Tal como demuestra el mismo autor (2004), en lo que denomina como el Teorema de Representación, todas las representaciones citadas, esto es la existencia de un operador lineal estrictamente positivo, la propiedad de martingala del precio de los activos y la existencia de una densidad precios estados estrictamente positiva, resultan equivalentes, siendo posible pasar de una caracterización a otra.

A partir de la representación probabilística del precio de la opción, reflejada en la ecuación (4), podemos derivar la relación entre el precio de una opción europea y la densidad neutral al riesgo, en adelante DNR:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial X^2} = e^{-r\tau} f_Q(X) \tag{6}$$

De (6) surge finalmente que la DNR está dada por:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial X^2} e^{r\tau} = f_Q(X) \tag{7}$$

resultado que usamos reiteradamente en nuestro trabajo.

Esta relación fue derivada por Breeden y Litzenberger (1978). Concurrentemente, Banz y Miller (1978) mostraron la aplicación de precios estados en la evaluación de un proyecto de inversión y sus ventajas sobre las metodologías tradicionales.

Sin embargo, gran parte de la literatura sobre el tema es bastante posterior a aquellos trabajos, lo que está principalmente explicado por la importancia que han cobrado actualmente los mercados de opciones y la mayor liquidez y variedad de los instrumentos negociados, condiciones indispensables para la estimación de Q.

III. Relevancia Empírica del Conocimiento de la Función de Densidad Neutral al Riesgo: Aplicaciones y Literatura

Desde un punto de vista teórico cada activo es caracterizado por una densidad subjetiva que surge del consenso del mercado y que identificaremos en adelante como la densidad "real", P, y una densidad neutral al riesgo, Q.

La aplicación de la familia de modelos ARCH sobre la serie de precios históricos del subyacente ha sido ampliamente utilizada en la literatura para obtener la densidad "real" o estimaciones de su volatilidad. Una alternativa a esta metodología basada en información histórica es la utilización del mercado de opciones para obtener la volatilidad implícita, como medida de la volatilidad esperada por el mercado, o la densidad implícita, como medida de la distribución de probabilidad del precio del subyacente y de las expectativas sobre su comportamiento. El contenido informativo de ambas alternativas será indudablemente diferente, pues están basadas en criterios radicalmente diferentes.

Diversos trabajos muestran que la volatilidad implícita es un buen estimador de la volatilidad futura del subyacente. Similar expectativa se ha puesto en la función de densidad implícita en el precio de las opciones.

La extracción de la DNR de los precios de las opciones negociadas en el mercado puede constituir en tal sentido una valiosa fuente de información para múltiples propósitos.

Conforme a nuestra representación probabilística del argumento de no-arbitraje, el conocimiento de la DNR del activo subyacente nos permitiría valuar cualquier derivado, f, sobre dicho activo, por compleja que resultara su función de pago $g(S_T)$, aplicando la regla:

$$f = e^{-r\tau} \int_0^\infty g(S_T) f_Q(S_T) dS_T \tag{8}$$

Son condiciones necesarias para que dicha valuación resulte procedente que el vencimiento del activo se corresponda con el de las opciones utilizadas para extraer la densidad de la medida de probabilidad Q, y que no ofrezca pagos intermedios, es decir que sea del tipo europeo.

El conocimiento de la DNR nos permitiría valuar, de tal forma, instrumentos exóticos o derivados sobre el mismo subyacente que carecieran de liquidez.

Como aplicación de este punto, y con un interés exclusivamente teórico, siendo el instrumento propuesto absolutamente hipotético, utilizamos, en el punto V del presente trabajo, la DNR extraída del mercado de opciones para valuar un instrumento financiero derivado exótico. Finalmente comparamos dicha valuación con la que nos brinda el modelo lognormal.

Otra aplicación potencial de la DNR implícita es la ejecución de arbitrajes sobre opciones ilíquidas. Entre los trabajos realizados sobre esta idea pueden citarse a los de Chiras y Manaster (1978) y Ait-Sahalia et al.(1997).

El conocimiento de Q podría también ser usado para conocer las expectativas de los agentes sobre eventos de naturaleza económica o política. En el primer sentido hay una activa investigación por parte de diversos Bancos Centrales, orientada a obtener información sobre expectativas inflacionarias o sobre las tasas de interés, en el entendimiento de que ello permitiría diseñar mejores políticas. En el segundo sentido se ha investigado la capacidad del mercado de opciones para permitirnos conocer las expectativas del mercado sobre resultados electorales.

Campa y Chang (1996, 1998), Campa, Chang y Refalo (1999) utilizan opciones sobre tipos de cambio como herramienta para conocer las expectativas del mercado sobre políticas de tipo de cambio regulado y analizan, entre otros, el caso del Plan Real en Brasil entre 1994 y 1997. El trabajo de estos autores confirma la evidencia existente en otros trabajos sobre la superioridad de esta metodología con relación a otras basadas en indicadores macroeconómicos, como las tasas de interés, para anticipar eventos económicos, en su caso ajustes en las bandas de flotación del tipo de cambio. Mizrach (1996), en la misma línea de investigación, encuentra evidencia en el mercado de opciones de una mayor probabilidad de devaluación de la libra, reflejada en la forma de la densidad neutral al riesgo, días antes de la efectiva devaluación de esa moneda. Gemmill y Saflekos (2000) examinan el desempeño de la DNR en el mercado de EEUU durante momentos de crisis o cambios económicos significativos, tales como la crisis bursátil de octubre de 1987. También analizan la información obtenida de dicha distribución en oportunidad de elecciones generales en Gran Bretaña. A diferencia de los resultados de Mizrach, encuentran que el método no permite anticipar las crisis, dado que la forma de la función de densidad incrementa su asimetría hacia la izquierda con posterioridad a la misma. No obstante ello, dicha información puede, en opinión de los autores, ayudar a revelar las expectativas divergentes que siguen a la crisis o campañas de elección. En otras palabras el método permite revelar el sentimiento del mercado con posterioridad a tales eventos, información que podría resultar de utilidad para una autoridad económica, como el Banco Central, o para inversores que siguen estrategias contrarias. Otros autores, como McCauley y Melick (1996) y Malz (1997) realizan trabajos similares mediante el análisis de gráficos de la DNR en distintos momentos, como medida del cambio de expectativas de los agentes. Soderlind y Svenson (1996), por su parte, utilizan el mercado de opciones para extraer la DNR de las tasas de interés.

Las expectativas sobre el potencial de estas técnicas para mejorar las decisiones de administración de riesgos constituyen, asimismo, una fuente de motivación adicional para el desarrollo de esta área de investigación.

Desde otra perspectiva cercana a la teoría económica, el conocimiento de Q podría permitirnos estimar las preferencias de riesgo de los agentes y evaluar la racionalidad de los precios de mercado. Esta metodología fue propuesta por Jackwerth (1996). El mismo autor, Jackwerth (2000), utiliza el mercado de opciones para estimar el grado de aversión absoluta al riesgo, para el período 1985-1996, obteniendo resultados incompatibles con los esperados bajo el supuesto de racionalidad y con las funciones de utilidad más utilizadas en la literatura económica. Rosenberg y Engle (2002), quienes cubren en su trabajo el período 1991-1995, encuentran, como Jackwerth, evidencia de irracionalidad en los resultados de su estimación de la aversión absoluta al riesgo. Entre otros trabajos realizados en esta línea de investigación podemos mencionar a los de Ait-Sahalia y Lo (2000), Fornari y Mele (2001), Pérignon y Villa (2002) y Liu et al.(2004).

La existencia de un mercado de opciones amplio, sobre diversas variables e instrumentos, es una condición indispensable para que esta área de investigación pueda realizar todo su potencial. La liquidez de los mercados resulta también una condición necesaria para que la información obtenida sea confiable. Ninguna de las técnicas que se han desarrollado y aplicado para este propósito, y que se describen someramente en el punto siguiente, pueden reemplazar a la información que se pierde por la falta de liquidez o la falta de instrumentos negociados sobre variables de interés (como podría ser la tasa de inflación, interés, etc.).

Como lo señala Bahra (1997), con relación a una aplicación potencial de esta metodología que podría resultar de interés para los Bancos Centrales, la limitación más importante desde el punto de vista de las autoridades económicas es la inexistencia de instrumentos y mercados que permitan conocer las expectativas sobre la inflación futura. Para ello sería necesario, por ejemplo, la existencia de opciones sobre la inflación o un mercado de opciones sobre tasas reales, como opciones sobre futuros de bonos indexados.

Las metodologías aplicadas en la literatura descansan, en alguna medida, en la interpolación de valores dentro del rango de precios de ejercicio de las opciones negociadas y extrapolaciones fuera del rango de las mismas. Una mayor disponibilidad de precios de ejercicios activamente negociados para un mismo vencimiento permitirá obtener, indudablemente, resultados más confiables.

Sobre este punto consideramos pertinente señalar que, adicionalmente a la importancia del mercado de capitales como medio de canalización y asignación eficiente del ahorro y del riesgo, resulta no menos relevante su rol como difusor de información indispensable para la toma de decisiones por parte de los agentes económicos. Esta importante función del mercado de capitales resulta frecuentemente omitida, pero particularmente mejor comprendida a partir de trabajos como los que se están desarrollando en está área de investigación, que ponen en evidencia las severas restricciones que imponen a dicho proceso decisorio la falta de liquidez, de instrumentos y, consecuentemente, de información relevante.

IV. Estimación de la Densidad Neutral al Riesgo: Revisión de las Metodologías y de la Literatura

El modelo de Black, Merton y Scholes asume que el precio del activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico, descripto por la ecuación diferencial estocástica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW^{P} \tag{9}$$

La aplicación del Lema de Ito permite derivar fácilmente la ecuación diferencial que satisface la función log S y verificar que esta variable tiene una distribución Normal con parámetros:

$$N\left[\log S + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right] \tag{10}$$

Bajo la medida de probabilidad equivalente, Q, sólo debemos reemplazar μ por r en las expresiones anteriores para obtener la distribución del logaritmo del precio del subyacente. Formalmente, tal conversión procede mediante la aplicación del Teorema de Girsanov.

El proceso atribuido al precio del activo subyacente en el modelo de Black, Merton y Scholes implica que la función de densidad neutral al riesgo es lognormal, esto es:

$$f_{Q}(S_{T}) = \frac{1}{S_{T}\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{\left[-\left(\log S_{T} - E\left(\log S_{T}\right)\right)^{2}\right]/2\sigma^{2}\tau} \tag{11}$$

De verificarse tal modelo, nuestro trabajo de extraer la DNR implícita en el precio de las opciones daría como resultado una densidad lognormal. No obstante ello, no puede ni debe descartarse la posibilidad de que la forma funcional de la densidad neutral al riesgo implícita en los precios de las opciones negociadas difiera de la correspondiente a aquella distribución, esto es que la valuación del mercado no se ajuste exactamente a la que resultaría de la aplicación del modelo lognormal. Evidencia en numerosos mercados revela que la volatilidad implícita en los precios de las opciones no se ajusta al supuesto de volatilidad constante. Mientras el modelo de Black, Merton y Scholes permitía explicar razonablemente bien el precio de las opciones negociadas en el mercado de EEUU con anterioridad a la crisis bursátil de octubre de 1987, con posterioridad a tal evento apareció en ese mercado una pronunciada "sonrisa de volatilidad". La volatilidad aparece como una función del precio de ejercicio y del plazo al vencimiento, observación que no se corresponde con el modelo de Black, Merton y Scholes. Rubinstein caracteriza a dicho fenómeno con el término crash-o-phobia, en alusión al temor de los inversores por la repetición de eventos extremos como el del "lunes negro". Similares resultados se encuentran en otros mercados.

Siendo el propósito de este tipo de trabajos obtener la densidad de la medida de probabilidad neutral al riesgo o medida de martingala que ha elegido el mercado, y no una mera representación teórica de la misma sustentada por el modelo de Black, Merton y Scholes, el procedimiento no debe encontrarse limitado por el supuesto de lognormalidad del precio del subyacente.

Abandonado el supuesto de lognormalidad, una amplia variedad de metodologías pueden proporcionarnos densidades que se ajustan a los precios de las opciones negociadas. Nos encontramos en este caso, desde un punto de vista empírico, con infinitos grados de libertad para la estimación de la densidad. Tal situación se ve reflejada en la variedad de procedimientos y modelos que se han desarrollado y aplicado, como se reseña a continuación. Advertimos, sin embargo, que tales grados de libertad se reducen considerablemente cuando se tienen en cuenta fundamentos de teoría económica, pues muchos de los modelos propuestos, probadamente aptos en un sentido empírico, devienen vacíos de contenido o sustento económicos.

Se han propuesto en la literatura diferentes clasificaciones de los métodos utilizados para extraer la DNR. Rama Cont (1997) propone una clasificación en Métodos de Expansión, Métodos Paramétricos y Métodos no Paramétricos. Otros autores, como Jackwerth (1999) sólo distinguen entre métodos Paramétricos y No Paramétricos. También se observan diferencias en la clasificación de algunos modelos entre distintos autores, pero ello no resulta relevante para nuestro propósito.

Como sus nombres lo indican, la diferencia esencial entre los métodos paramétricos y los métodos no paramétricos es que aquellos restringen la elección de la forma funcional de la DNR. Así, por ejemplo, la adopción de una distribución lognormal como representación de la DNR constituye un método paramétrico.

Los métodos de expansión incluyen una variada gama de metodologías que tienen como característica común el uso de expansiones de series para la obtención de la RND. La estrategia en general consiste en agregarle a una distribución simple, como la normal o lognormal, términos adicionales correctivos para obtener formas funcionales que aproximan a la densidad implícita.

Dentro de los métodos paramétricos se encuentra el basado en la mezcla de distribuciones lognormales, propuesto por Ritchey (1990). Éste ha sido extensamente utilizado en la literatura, presentando como ventajas su simple instrumentación y su aptitud y flexibilidad para capturar características frecuentemente observadas en las distribuciones de los precios de los activos. La densidad en este caso está representada por una mezcla de n densidades lognormales. Pese a que generalmente se utilicen dos densidades, el modelo no debe necesariamente limitarse a esa cantidad. Asi, por ejemplo, Melick y Thomas (1997) utilizan tres lognormales en su trabajo sobre los precios de los futuros sobre el petróleo durante la guerra de 1990 y 1991. Entre otros trabajos que utilizan esta metodología podemos mencionar a los de Bahra (1997), Soderlind y Svenson (1997), Coutant et al.(2001), Campa et al.(1998), Jondeau y Rockinger (2000), Gemmill y Saflekos (2000), Bliss y Panigirtzoglow (2000), Anagnou, et al. (2002), Liu et al. (2004).

Una alternativa dentro de los métodos paramétricos es la utilización de la Distribución Beta Generalizada de Segunda Clase, GB2, propuesta y aplicada por Bookstaber y McDonalds (1987) y MacDonalds y Bookstaber (1991). Anagnou et al. (2002) utiliza esta distribución para obtener la DNR del tipo de cambio libra esterlina/dólar, en tanto que Aparicio y Hodges (1998) la aplican a los futuros sobre el S&P500.

En esta misma categoría de métodos paramétricos Rama Cont incluye a la metodología basada en el uso de árboles binomiales implícitos, propuesta por Rubinstein (1994). El procedimiento consiste en extraer el árbol binomial implícito de los precios de las opciones negociadas en el mercado. Este árbol binomial tiene el mismo contenido informativo que la densidad Q.

Dentro de los métodos no paramétricos se encuentra la metodología propuesta por Shimko (1993) que consiste en calibrar una función de volatilidad a la volatilidad implícita en los precios de las opciones que constituyen las observaciones del trabajo, proponiendo el autor para ello una función cuadrática del precio de ejercicio. La estimación de la DNR procede luego mediante la aplicación de la ecuación (7). Esta metodología, y variantes de la misma, han sido muy utilizadas en la literatura, con resultados satisfactorios.

En la misma categoría de métodos no paramétricos se incluye a la metodología utilizada por Ait-Sahalia y Lo (1995), conocida como Non-parametric Kernel Regression. Mediante este procedimiento los autores obtienen un estimador suave de la función de valuación del derivado. Bajo ciertas condiciones de regularidad la derivada segunda del estimador converge a $f_Q(x)$ para muestras grandes, siendo la necesidad de una importante cantidad de observaciones una desventaja de esta metodología respecto de las anteriormente reseñadas.

El Método de Máxima Entropía es otra metodología no paramétrica y fue propuesto por Buchen y Kelly (1996) y Stutzer (1996). La estimación de la DNR a partir de un número limitado de observaciones posibilita numerosas expresiones de la misma, compatibles con los precios de las opciones negociadas. El objetivo del método en cuestión es identificar la densidad que satisface la condición de máxima entropía, siendo la entropía una medida del contenido informativo de aquella.

Dentro de la categoría de Métodos de Expansión Abadir y Rockinger (1997) utilizan funciones hipergeométricas, Abken, Madan y Rammamurtie (1996a, 1996b) usan polinomios Hermitianos de cuatro parámetros, Brenner y Eom (1997) emplean polinomios de Laguerre. Otros autores como Jarrow y Rudd (1982), Corrado y Su(1996), Longstaff (1995) y Rubinstein (1998) usan expansiones de Edgeworth.

Una clasificación alternativa propuesta en la literatura es aquella que atiende a la estrategia seguida para la derivación de la DNR. Desde esta perspectiva diferente podemos distinguir entre aquellas metodologías orientadas a:

a) Estimar directamente la DNR.

b) Estimar directamente la función de valuación del derivado.

c) Asignar al precio del subyacente un tipo de proceso estocástico.

d) Especificar una función de volatilidad implícita para todo X

Todos las alternativas citadas resultan equivalentes desde un punto de vista teórico, con la salvedad de lo observado anteriormente respecto de su sustento económico. No obstante ello, algunas presentan claras ventajas en su instrumentación. En atención a ello, las metodologías comprendidas en los puntos a) y d) suelen predominar en la literatura.

Respecto del desempeño de los distintos modelos, existen aún pocos trabajos realizados para estar en condiciones de ofrecer una conclusión definitiva. Diversos trabajos muestran que varias de las metodologías propuestas tienen un desempeño satisfactorio y arrojan resultados similares cuando se cuenta con una suficiente cantidad de observaciones, esto es de opciones activamente negociadas con diferentes precios de ejercicios.

En términos generales un buen modelo debería permitir capturar los hechos estilizados frecuentemente observados en las distribuciones de los precios de los activos y descriptos en la literatura, tales como colas más gruesas que las de la distribución normal y niveles generales de asimetría y kurtosis diferentes de los de aquella distribución. Asimismo, desde un punto de vista práctico el modelo debería permitirnos una simple y precisa calibración y estimación de los parámetros necesarios. En este punto el investigador debe tomar en consideración que cuantos más parámetros sean requeridos por el modelo mayor será la cantidad de observaciones necesarias para una adecuada estimación de los mismos. La elección debe por lo tanto contemplar también este aspecto, que está condicionado por la realidad de cada mercado. En el caso del mercado local, la limitada disponibilidad y liquidez de opciones con diferentes precios de ejercicios determina que no sea factible o recomendable la utilización de modelos con una gran cantidad de parámetros.

V. Estimación de la Función de Densidad Neutral al Riesgo: Aplicaciones en el Mercado Local

Para nuestras aplicaciones en el mercado local hemos utilizado las opciones sobre las acciones de Tenaris, con vencimiento en el mes de febrero. La elección está basada en consideraciones de liquidez y disponibilidad de diferentes precios de ejercicio. Pese a constituir una de las dos opciones negociadas más líquidas del mercado, debemos señalar que la liquidez se concentra principalmente en los precios de ejercicio cercanos al precio corriente del subyacente. Ello representa una restricción importante para la estimación de los parámetros del modelo, al limitar la cantidad de observaciones disponibles. Como señalamos anteriormente, la limitación de observaciones obliga también a descansar en una mayor necesidad de interpolación y extrapolación de resultados. La falta de liquidez de las opciones profundamente en dinero (deep in the money) o fuera de dinero (deep out of the money) es una característica común en muchos mercados.

Consideraciones relacionadas con la disponibilidad de observaciones y las características de las distintas metodologías propuestas en la literatura para la extracción de la DNR determinaron nuestra elección de los modelos de volatilidad implícita y mezcla de lognormales, propuestos por Shimko y Ritchey, respectivamente.

A. Modelo de Volatilidad Implícita

El procedimiento comienza en este caso con la estimación de una función de volatilidad cuadrática que mejor se ajuste a la volatilidad implícita en los precios de las opciones negociadas que constituyen las observaciones del trabajo o, equivalentemente, que minimice los errores de valuación del modelo. Ello requiere la definición y adopción de una unidad de medida o métrica de distancia, que en nuestro caso está representada por la minimización de una suma de errores al cuadrado. La calibración del modelo y estimación de los parámetros de la función de volatilidad cuadrática procede, en consecuencia, mediante la minimización de una función de la forma:

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \left(c_{mercado}\left(X_i, \sigma_{implícita}\right) - c_{\mathrm{mod}\,elo}\left(X_i, \sigma_{\mathrm{mod}\,elo}\left(X_i, \theta\right)\right)\right)^2 \qquad (12)$$

donde la volatilidad del modelo está representada por la función cuadrática:

$$\sigma_{\mathrm{mod}elo}(X, \theta) = a + bX + cX^2 \qquad (13)$$

Los parámetros (θ) a estimar son en este caso a, b, y c.

Mediante (12) obtenemos en nuestro modelo los valores de los parámetros necesarios para la función de volatilidad (13). A partir de (7) y la expresión (15) que sigue a continuación, y que demostramos en el Apéndice del presente trabajo, derivamos la densidad de la medida de probabilidad Q:

$$e^{rT}\ \frac{\partial c}{\partial X} = -N(d_2) + \left(X\sqrt{T}\,\phi(d_2)\right)\frac{\partial \sigma}{\partial X} \tag{14}$$

y

$$e^{rT}\ \frac{\partial^2 c}{\partial X^2} = \phi(d_2)\left\{\frac{1}{\sigma X\sqrt{T}} + \left(\frac{2d_1}{\sigma}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \left(\frac{d_1 d_2 X\sqrt{T}}{\sigma}\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial X}\right)^2 + \left(X\sqrt{T}\right)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2}\right\} \tag{15}$$

donde N y ϕ representan la función de distribución acumulada y la función de densidad, respectivamente, de una normal estándar y las derivadas de la función de volatilidad respecto al precio de ejercicio se obtienen a partir de la función de volatilidad cuadrática (13).

Finalmente, obtenemos la probabilidad neutral al riesgo acumulada mediante la expresión:

$$F_Q(x) = 1 - N(d_2) + X\sqrt{T}\,\phi(d_2)\frac{\partial \sigma}{\partial X} \tag{16}$$

Los resultados analíticos del procedimiento están sustentados en un modelo computacional que desarrollamos al efecto. Más informativo que su presentación, objetivo tampoco factible por consideraciones de espacio, resulta la representación gráfica de la DNR obtenida y su comparación con la distribución que arrojaría el modelo lognormal de Black, Merton y Scholes, propósito que desarrollamos a continuación.

A efectos de comparar la DNR de la acción de Tenaris, extraída del mercado de opciones, con la densidad que deberíamos observar bajo el supuesto de lognormalidad simulamos esta última mediante extracciones aleatorias de una distribución normal estándar y la utilización de la expresión siguiente:

$$S_T = S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}\,z} \tag{17}$$

En la Figura 1, a continuación, mostramos ambas distribuciones.

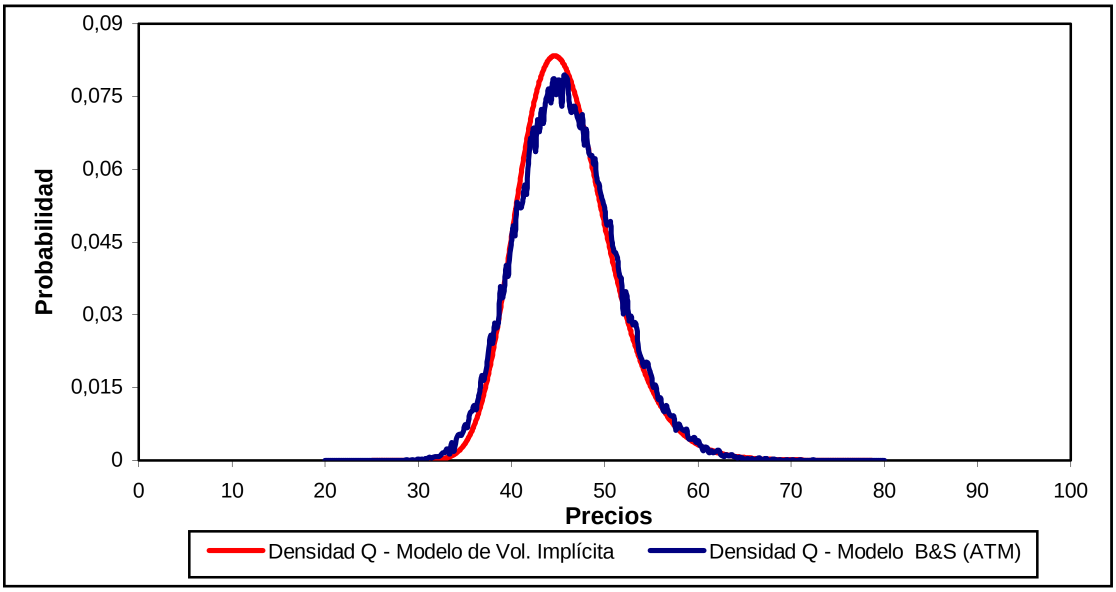

Figura 1: Densidad Neutral al Riesgo obtenida mediante el método de volatilidad implícita y Densidad de una Lognormal calibrada al activo subyacente

Puede apreciarse que la DNR implícita no se desvía significativamente de la lognormal, resultado que es confirmado también por el método de mezcla de lognormales utilizado en el punto siguiente.

La suma de errores al cuadrado del modelo, métrica utilizada para su calibración, es 0.04594965.

B. Modelo de Mezcla de Lognormales

En este caso calibramos nuestro modelo minimizando una función de error de la forma:

$$F(\theta)=\sum_{i=1}^{N}\left(c_{mercado}\left(X_i\right)-c_{\mathrm{mod}\,elo}\left(X_i/\theta\right)\right)^2 \tag{18}$$

La densidad neutral al riesgo está dada por la expresión:

$$f_Q\left(S_T\right)=pf_Q\left(S_T/S_1,\sigma_1,T\right)+\left(1-p\right)f_Q\left(S_T/S_2,\sigma_2,T\right) \tag{19}$$

De (19) surge que para nuestro trabajo utilizamos dos densidades lognormales, siendo la densidad del precio del subyacente una combinación ponderada de esas densidades.

La función de densidad debe satisfacer adicionalmente las siguientes condiciones, propias de una medida de probabilidad y del supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje:

$$\begin{aligned} &0 \leq p \leq 1 \\ &S = pS_1 + (1-p)S_2 \end{aligned} \tag{20}$$

Los parámetros a estimar para la calibración del modelo son p, $S_{1,}$ σ_1 y σ_2, pues S_2 se deriva por (20), de S (precio corriente del subyacente) y de S_1, en tanto que (1-p) se obtiene a partir de la estimación de p.

El precio de una opción de compra resulta de una combinación de precios obtenidos mediante la aplicación del modelo de Black, Merton y Scholes. Esto es,

$$\begin{aligned} &c_{\text{mod}\,elo}(X/\theta) = e^{-r\tau}\int_X^{\infty}(S_T - X)\left[pf_Q(S_1,\sigma_1,\tau) + (1-p)f_Q(S_2,\sigma_2,\tau)\right]dS_T = \\ &= pc_{B\&S}(S_1,\sigma_1,\tau) + (1-p)c_{B\&S}(S_2,\sigma_2,\tau) \end{aligned} \tag{21}$$

En la Figura 2 mostramos la DNR implícita y la DNR de una distribución lognormal simulada para el precio del subyacente.

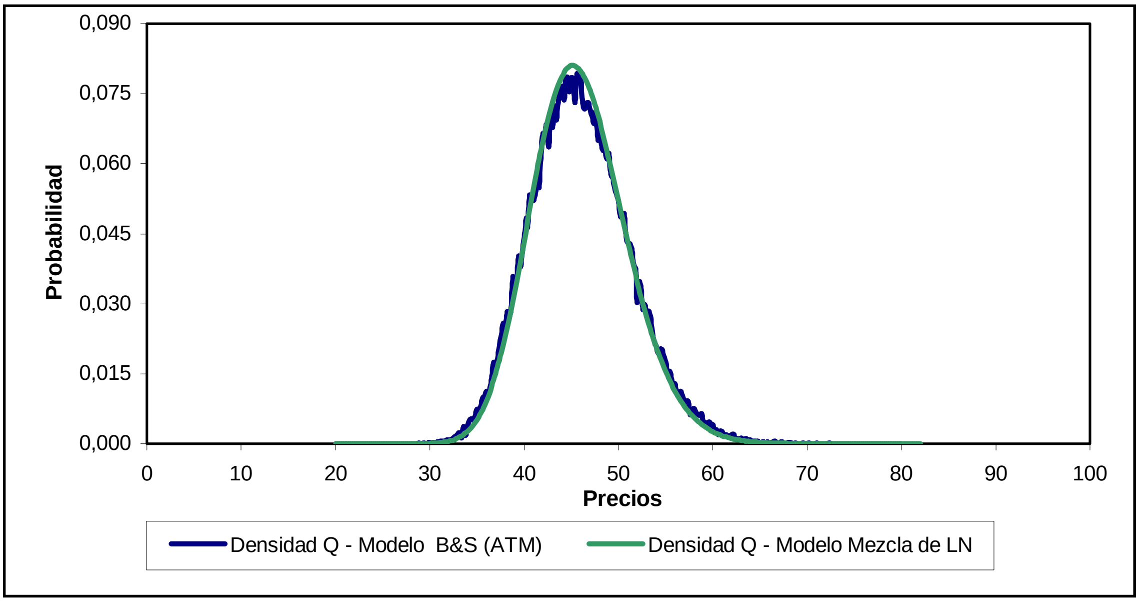

Figura 2: Densidad Neutral al Riesgo obtenida mediante mezcla de Lognormales y Densidad Lognormal calibrada al activo subyacente.

La DNR implícita resulta visualmente indistinguible de la DNR lognormal simulada, resultado que se corresponde también con el obtenido en el punto anterior.

La suma de errores al cuadrado asciende a 0.0541722, indicando ello un mejor ajuste del modelo de volatilidad implícita a los precios de mercado.

La Figura 3 a continuación permite apreciar, no obstante, que las diferencias entre las densidades obtenidas mediante ambas metodologías no resultan significativas.

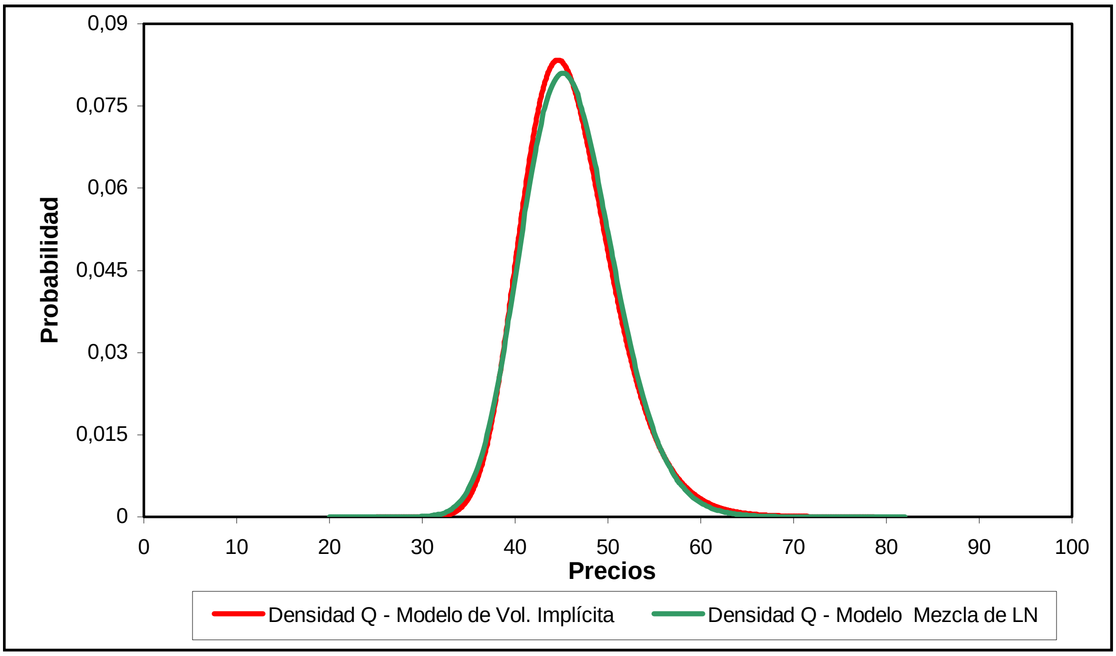

Figura 3: Función de Densidad Neutral al Riesgo obtenida mediante Vol. Implícita y Mezcla de Lognormales.

C. Aplicación del Modelo de Volatilidad Implícita a la Valuación de un Instrumento Derivado Exótico

En este punto nos proponemos mostrar una de las aplicaciones potenciales del conocimiento de la DNR. Para ello valuamos un instrumento derivado exótico hipotético, en ausencia de tales instrumentos sobre la acción de Tenaris, utilizando la densidad neutral al riesgo obtenida por el modelo de volatilidad implícita. A su vez, comparamos esta valuación con la que surgiría de aplicar el modelo lognormal de Black, Merton y Scholes.

El derivado exótico propuesto es del tipo europeo con vencimiento en febrero y tiene una función de pago representada por S_T^2.

Bajo el supuesto de lognormalidad, y en ausencia de oportunidades de arbitraje, el valor del derivado estaría dado por la expresión:

$$f = e^{-r\tau} E^{Q_{\log normal}}\left(S_T^2\right) = S_t^2 e^{\left(r+\sigma^2\right)\tau} \tag{22}$$

Su valor en nuestro modelo resulta de una expresión similar, pero utilizando la medida de probabilidad neutral al riesgo derivada del modelo de volatilidad implícita. Esto es,

$$f = e^{-r\tau} E^{Q\,\mathrm{modelo}}\left(S_T^2\right) \tag{23}$$

De la aplicación de (22) obtenemos que la valuación del instrumento mediante el modelo lognormal asciende a \$2.121,36, en tanto que la valuación utilizando la DNR implícita, mediante (23), es de \$2.125,09. El modelo lognormal subvalúa al activo en \$3,73, importe que representa un 0.18% sobre el valor teórico que surge de la utilización de la DNR implícita. A diferencia de los resultados reportados en otros trabajos similares, el desvío respecto de la valuación bajo el supuesto de lognormalidad resulta poco significativo en nuestro caso. Ello no significa, de manera alguna, que pueda afirmarse que el supuesto de lognormalidad se satisface razonablemente en el mercado local, pues sólo debe interpretarse como un resultado particular para la acción y el periodo analizados. Al respecto debemos advertir que la falta de liquidez de las opciones con precios de ejercicios más alejados del precio corriente del subyacente puede tener un efecto considerable sobre la bondad de las proyecciones de los resultados a los extremos de la distribución y, consecuentemente, sobre la estimación de la densidad. Como expresamos anteriormente, ninguna metodología ni procedimiento puede reemplazar a la información que se pierde por la falta de transacciones y ello es particularmente relevante en el mercado local.

D. Estimación de la Densidad "Real" del Subyacente.

El comportamiento real del precio del activo está caracterizado por la función de densidad de la medida de probabilidad que identificamos como P, pues los inversores son aversos al riesgo. Nuestro objetivo es en este caso derivar la función de densidad "real" a partir de la DNR, mostrar gráficamente la relación entre ambas y la incidencia del grado de aversión al riesgo de los agentes sobre la forma y ubicación de la densidad de P.

Diversas metodologías propuestas para la obtención de la DNR ofrecen una más fácil y directa derivación de la densidad "real". En nuestro trabajo nos apoyamos para ello en resultados teóricos conocidos y ampliamente reflejados en la literatura económica. Tal elección se sustenta en lo que constituye un propósito central del punto, cual es mostrar, a partir de argumentos y fundamentos económicos, la relación teórica entre la medida de probabilidad P y la medida de probabilidad Q. Una conveniente especificación del modelo nos permitirá, a su vez, simplificar la estimación de la función de densidad "real".

Hemos mostrado anteriormente que el precio de una opción de compra europea puede representarse mediante la expresión:

$$c(X)=e^{-r\tau}E^{Q}\left[(S_T-X)^{+}\right]=e^{-r\tau}\int_0^{\infty}(S_T-X)^{+}f_Q(S_T)dS_T \qquad (24)$$

Siendo Q una medida de probabilidad equivalente a P, la medida de probabilidad "real", podemos expresar al valor de la opción de compra como:

$$c(X)=e^{-r\tau}\int_0^{\infty}(S_T-X)^{+}\frac{f_Q(S_T)}{f_P(S_T)}f_P(S_T)dS_T=E^{P}\left[m(S_T)(S_T-X)^{+}\right] \qquad (25)$$

Mediante esta transformación obtenemos una representación alternativa para el precio del activo, presentándolo como un valor esperado respecto de la medida de probabilidad "real", P, donde $m(S_T)$ representa lo que se ha denominado en la literatura como factor de descuento estocástico o Pricing Kernel, y está dado por la expresión:

$$m(S_T) = e^{-r\tau} \frac{f_Q(S_T)}{f_P(S_T)} \tag{26}$$

La teoría económica nos permite relacionar el factor de descuento estocástico con las preferencias del agente. Bajo ciertos supuestos, Lucas (1978), Merton (1992), Cochrane (2001), el factor de descuento estocástico es proporcional a la utilidad marginal del consumo de un agente representativo y podemos representarlo de la siguiente forma:

$$m_T(\omega) = \beta\left(\frac{U'(C_T(\omega))}{U'(C_t)}\right) = \alpha U'(C_T(\omega)) \tag{27}$$

donde U´ representa la utilidad marginal, C el consumo, β el factor de descuento subjetivo, ω los estados de la naturaleza, t el momento presente, T un momento futuro y α está resumiendo, en la expresión final, a los parámetros de la expresión anterior que devienen irrelevantes en la derivación de la ecuación (29) que proporcionamos más adelante y que nos permite obtener la densidad "real".

A efectos de modelar las preferencias de los agentes utilizamos la siguiente representación de la función de utilidad Power:

$$U(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma \neq 1 \tag{28}$$

donde γ representa el coeficiente de aversión relativa al riesgo.

De (26), (27) y (28) puede comprobarse que la relación entre la densidad de Q y la densidad de P está dada por la expresión:

$$f_P(S_T) = \frac{S_T^{\gamma} f_Q(S_T)}{\int_0^{\infty} S_T^{\gamma} f_Q(S_T) dS_T} \tag{29}$$

La utilización de (28) requiere que estimemos el grado de aversión relativa al riesgo,γ, objetivo que cumplimos mediante la aplicación de la expresión:

$$\frac{\log\left(E^{P}\left(S_{T}\right)/S\right)-\log\left(E^{Q}\left(S_{T}\right)/S\right)}{T}=\gamma\sigma^{2} \tag{30}$$

Nuestra estimación de tal parámetro nos proporciona un valor de 4.13. Estudios realizados sobre distintos mercados arrojan para éste valores que se encuentran entre 3.8 y 4.

Obtenido el valor de γ, la aplicación de (29) nos permite finalmente derivar la densidad "real", P.

A continuación mostramos gráficamente la DNR y la densidad "real" que surge del procedimiento anteriormente descripto.

En la Figura 4 representamos la DNR y la densidad "real" para el grado de aversión al riesgo que surge de nuestro trabajo.

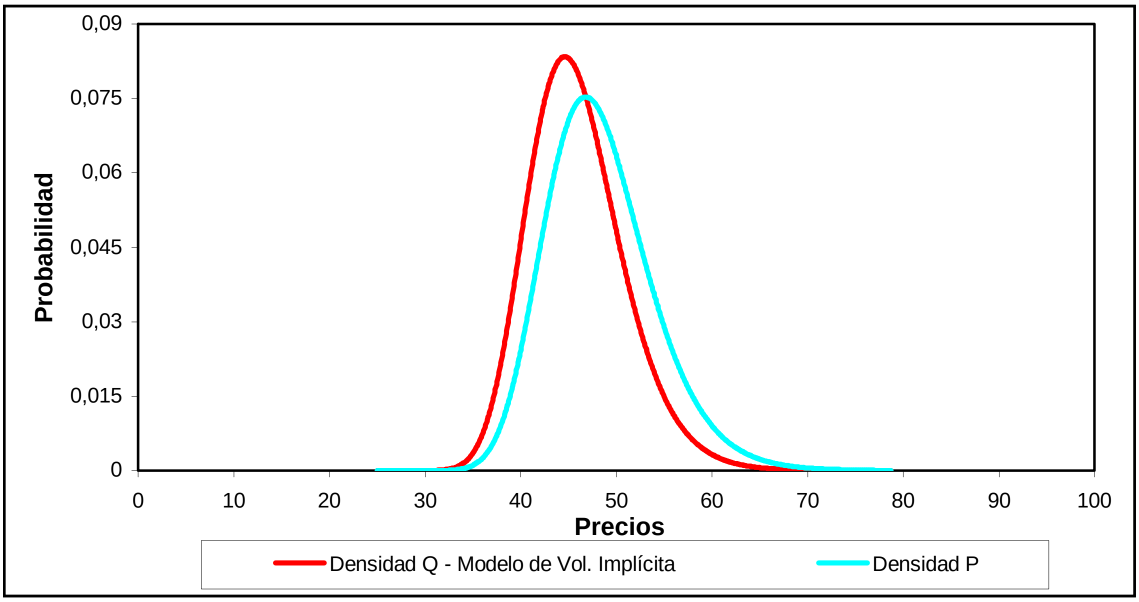

Figura 4: Densidad Neutral al Riesgo y Densidad Real con γ=4.13.

Al momento de nuestro trabajo el precio del subyacente era de $45.7. El valor esperado del precio al vencimiento de las opciones utilizando la medida de probabilidad neutral al riesgo es $45.95, en tanto que su valor esperado utilizando la medida de probabilidad "real" es $48.37. La distancia entre ambos valores esperados está representada por la prima de riesgo del activo, reflejada en la distribución del precio del activo subyacente bajo la medida de probabilidad P.

Como señala Rubinstein (1994), para niveles de primas de riesgo moderadas, o equivalentemente niveles de γ bajos, la forma de la densidad "real" es similar a la correspondiente a la DNR encontrándose desplazada hacia la derecha. Ello puede apreciarse en la Figura 5, donde hemos utilizado un γ=2.

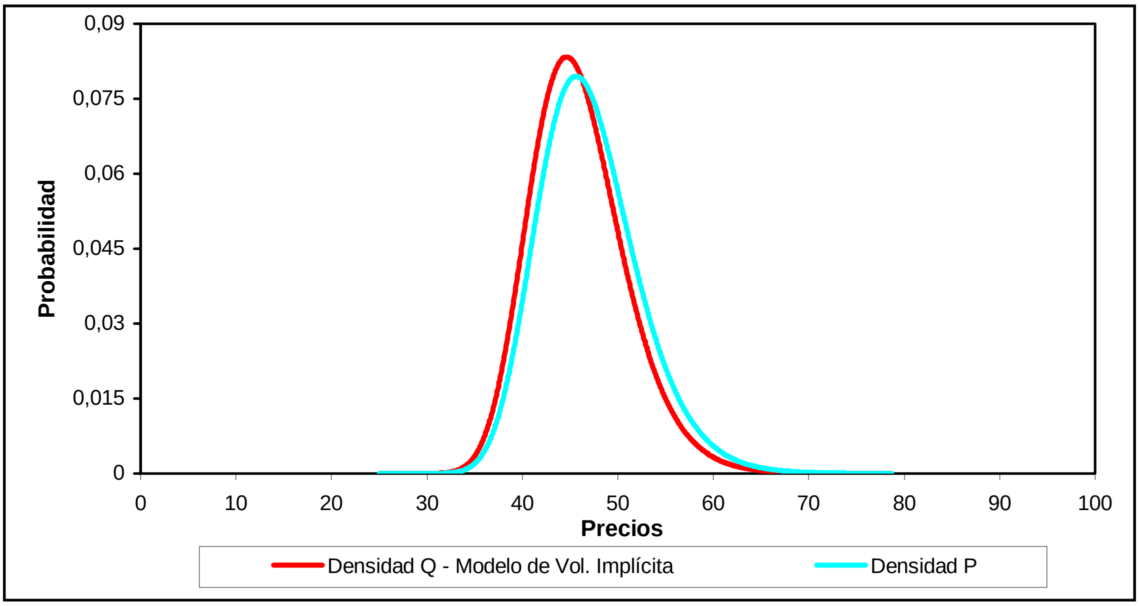

Figura 5: Densidad Neutral al Riesgo y Densidad Real con γ=2.

Si los agentes fueran realmente neutrales al riesgo las densidades P y Q deberían fundirse en una misma, como ocurre en nuestro modelo y lo mostramos en la Figura 6.

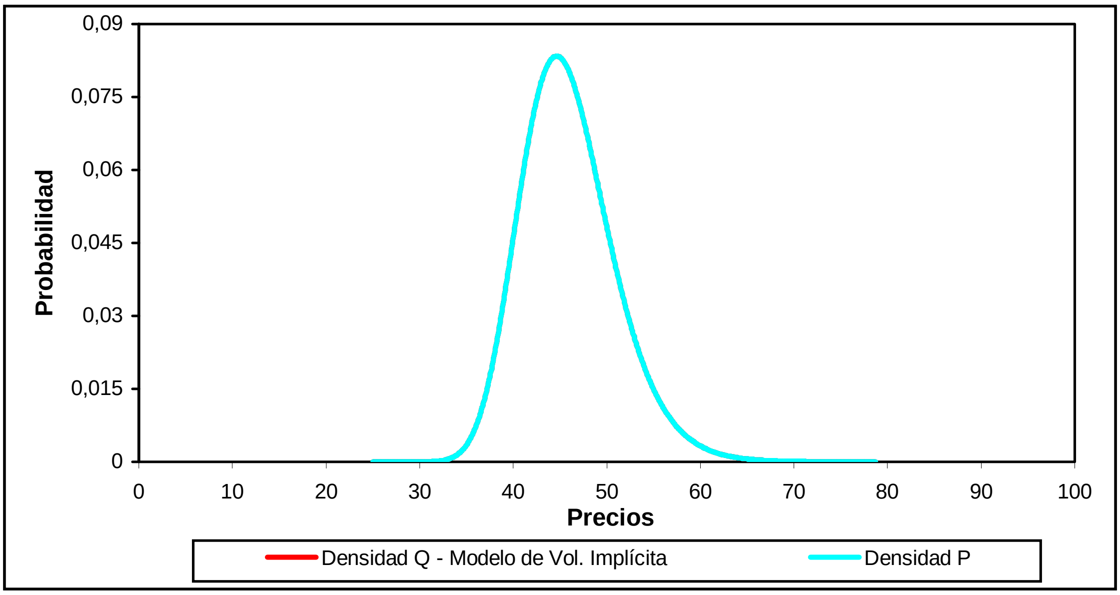

Figura 6: Densidad Neutral al Riesgo y Densidad Real con γ=0

La similitud de la forma de Q con la de P permite descansar en la utilización de aquella para conocer las expectativas del mercado, o analizar los cambios en tales expectativas a través del comportamiento de esta distribución a lo largo del tiempo.

VI. Conclusiones

En este trabajo, que en nuestro conocimiento constituye el primero de su tipo en nuestro medio, realizamos una reseña de los fundamentos teóricos y principales metodologías desarrolladas para la obtención de la función de densidad neutral al riesgo implícita, mostrando la aplicación de dos de ellas, ampliamente utilizadas en la literatura, a las opciones sobre la acción de Tenaris.

Hemos desarrollado someramente diversas aplicaciones que podría recibir este conocimiento a fin de permitir una mejor apreciación de su potencial. Con un objetivo meramente demostrativo de su utilidad y relevancia empírica, aplicamos la función de densidad obtenida mediante el modelo de volatilidad implícita a la valuación de un instrumento derivado exótico hipotético.

Abordamos también, desde una perspectiva teórica y empírica, la relación que existe entre la medida de probabilidad "real" y la medida de probabilidad neutral al riesgo, mostrando la influencia que ejerce la aversión al riesgo de los agentes sobre la primera. Derivamos, en este punto, la densidad "real" del precio de la acción de Tenaris a partir de la densidad neutral al riesgo implícita y de fundamentos económicos.

Diversas son las cuestiones que hemos evitado abordar e incluir a fin de limitar la extensión del trabajo. Consideramos que nuestra investigación puede extenderse en numerosas direcciones interesantes, como la comparación del contenido informativo de la densidad "real" obtenida mediante nuestro procedimiento con la densidad "real" obtenida a partir de la serie histórica del precio del subyacente, el análisis de la capacidad de anticipación y predicción de los cambios en la forma de la densidad neutral al riesgo o la densidad “real” frente a situaciones de crisis, la racionalidad de los precios de mercado y la existencia o no de oportunidades de arbitraje en el mercado local, la valuación de instrumentos exóticos o ilíquidos y la evaluación del riesgo de crédito, entre otros, temas que nos proponemos abordar en trabajos futuros.

Finalmente deseamos dejar nuestra reflexión sobre la importancia del mercado de capitales como instrumento para una eficiente asignación del ahorro, distribución del riesgo, y como fuente de información indispensable para una mayor racionalidad en la toma de decisiones económicas por parte del público inversor, las empresas y las autoridades económicas. El trabajo de Stephen Ross (1976) ha permitido comprender y apreciar la aptitud de las opciones para completar mercados y contribuir, de tal forma, al objetivo de una mayor eficiencia económica. Los trabajos en esta área de investigación, por su parte, ponen de relieve el importante contenido informativo del mercado de estos activos.

Referencias

[1] Abadir, K. y Rockinger, M. (1997) “Density-embedding functions”, *HEC*, working pager.

[2] Abken, P., Madan, D. y Rammamutie, S. (1996a) “Estimation of risk-neutral and statistical densities by hermite polynomial approximation: UIT an application to eurodollar futures options”, *Federal Reserve Bank of Atlanta*, working paper.

[3] Abken, P., Madan, D. y Rammamutie, S. (1996b) “Pricing S&P500 index options using a Hilbert space basis”, *Federal Reserve Bank of Atlanta*, working paper.

[4] Ait-Sahalia, Y., Wang, Y. y Yared, F. (1997) “Do option markets correctly assess the probabilities of movement of the underlying asset?”, *Aarhus University Center for Analytical Finance*, working paper.

[5] Ait-Sahalia, Y. y Lo, A. H. (1998) "Nonparametric estimation of state price densities implicit in financial asset prices", *Journal of Finance*, 53, 499-547.

[6] Ait-Sahalia, Y. y Lo, A. H. (2000) "Nonparametric risk management and implied risk aversión", *Journal of Econometrics*, 94, 9-51.

[7] Anagnou, I., Bedendo, M., Hodges, S. D. y Tompkins, R. (2002) "The relation between implied and realized probability density functions", *University of Warwick*, UK.

[8] Bahra, B. (1997) "Implied risk neutral probability density functions from options prices: theory and application", *Bank of England*, working paper N°66.

[9] Banz, R. y Miller, M (1978) "Prices for state-contingent claims: some estimates and applications", *Journal of Business*, 51, 653-672.

[10] Black, F y Scholes, M (1973) "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 635-654.

[11] Bliss, R. y Panigirtzoglou, N. (2000) "Testing the stability of implied probability density functions", *Bank of England*, working paper.

[12] Bliss, R. y Panigirtzoglou, N. (2004) "Option-implied risk aversion estimates", *Journal of Finance*, 59, 407-446.

[13] Bootstaber, R. y McDonald, J. (1987) "A general distribution for describing security price returns", *Journal of Business*, 60, 401-424.

[14] Breeden, D. T. y Litzenberger, R. H. (1978) "Prices of state-contingent claims implicit in option prices", *Journal of Business*, 51, 621-654.

[15] Brenner, M y Eom, Y. (1997) "No-arbitrage option pricing: New evidence on the validity of the martingale property", *New York University*, working paper.

[16] Buchen, P y Kelly, M. (1996) "The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, N°1, 143-159.

[17] Campa, J. y Chang, P. (1996) "Arbitrage-based tests of target zone credibility: Evidence from ERM cross-rate options", *American Economic Review*, 86, 726-740.

[18] Campa, J., Chang, P. y Reider, R. (1998) "Implied exchange rate distributions: Evidence from OTC options markets", *Journal of International Money and Finance*, 17, 117-160.

[19] Campa, J., Chang, P. y Refalo, J. (1999) "An options-based analysis of emerging market exchange rate expectations: Brazil´s real plan, 1994-1997", working paper.

[20] Campbell, J. Y., Lo, A. W. y MacKinlay, A. C. (1997), *The econometrics of financial markets*, Princeton University Press.

[21] Chiras, D. P. y Manaster, S. (1978) "The information content of option prices and a test of market efficiency", *Journal of Financial Economics*, 6, 187-211.

[22] Cochrane, J. H.(2001), *Asset Pricing*, Princeton University Press.

[23] Cont, R. (1997) "Beyond implied volatility", *Econophysics*, Dordrecht: Kluwer.

[24] Corrado, C. y Su, T: (1997) "Implied volatility skews and stock index skewness and kurtosis implied by S&P500 index options prices", *Journal of Derivatives*, 4, 8-19.

[25] Corrado, C. y Su, T: (1997) "Skewness and kurtosis in S&P500 returns implied by options prices", *Journal of Financial Research*, 19, 175-192.

[26] Coutant, S., Jondeau, E. y Rockinger, M. (1997) "Reading interest rate and bond futures options smiles: How PIBOR and notional operators appreciated the 1997 French snap election", *HEC School of Management*, working paper.

[27] Coutant, S., Jondeau, E. y Rockinger, M. (2001) "Reading PIBOR futures options smiles: the 1997 snap election", *Journal of Banking and Finance*, 25, 1957-1987.

[28] Duffie, D. (1992), *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press.

[29] Fornari, F. y Mele, A. (2001) "Recovering the probability density function of asset prices using GARCH as difussion approximations", *Journal of Empirical Finance*, 8, 83-110.

[30] Gemmill, G. (1996) "Did option traders anticipate the crash? Evidence from volatility smiles in the UK with US comparisons", *Journal of Futures Markets*, 16, 881-897.

[31] Gemmill, G. y Saflekos, A. (2000) "How useful are implied distributions? Evidence from stock-index options", *The Journal of Derivatives*.

[32] Harrison, J. M. y Kreps, D. (1979) "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets", *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.

[33] Harrison, J. M. y Pliska, S. (1981) "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading", *Stochastic Processes and their applications*, 11, 215-260.

[34] Jackwerth, C. J. (1997) "Generalized binomial trees", *Journal of Derivatives*, 5, 7-17.

[35] Jackwerth, C. J. (1999) "Option-implied risk-neutral distributions and binomial trees: A literature review", *The Journal of Derivatives*, winter 1999.

[36] Jackwerth, C. J. (2000) "Recovering risk aversion from option prices and realized returns", *Review of Financial Studies*, 13, 433-451.

[37] Jackwerth, C. J. y Rubinstein, M (1996) "Recovering probability distributions from contemporaneous security prices", *Journal of Finance*, 51, 1611-1631.

[38] Jackwerth, C. J. y Rubinstein, M (1997) "Recovering probabilities and risk aversion from option prices and realized returns", *UC Berkeley Haas School of Business Working Paper.*

[39] Jarrow, R. y Rudd, A. (1982) "Approximate valuation for arbitrary stochastic processes", *Journal of Financial Economics*, 10, N°3, 347-369.

[40] Jondeau, E. y Rockinger, M. (2000) "Reading the smile: The message conveyed by methods which infer risk neutral densities", *Journal of International Money and Finance*, 19, 885-915

[41] Jondeau, E. y Rockinger, M. (2001) "Gram-Charlier densities", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, 1457-1483.

[42] Liu, X., Shackleton, M. B., Taylor, S. J. y Xu, X. (2004) "Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions" *Lancaster University*, working paper.

[43] Longstaff, F (1992) "An empirical examination of the risk-neutral valuation model", *College of Business, Ohio State University and the Anderson Graduate School of Management, UCLA, working paper.*

[44] Longstaff, F (1995) "Options pricing and the martingale restriction", *Review of Financial Studies*, vol.8, N°4, 1091-1124.

[45] Lucas, R. E. (1978) "Asset prices in an exchange economy", *Econometrica*, 46, 1429-1446.

[46] MacDonald, J. B. y Bookstaber, R. M: (1991) "Option pricing for generalized distributions", *Communications in Statistics*, 20, 4053-4068.

[47] Malz, A. (1997) "Estimating the probability distribution of the future exchange rate from option prices", *Journal of Derivatives*, 5, N°2, 18-36.

[48] McCauley, R. y Melick, W. (1996) "Risk reversal risk", *RISK*, 9, N°11, 54-57.

[49] Melick, W. R. y Thomas, C. P. (1997) "Recovering an assets implied PDF from options prices: an application to crude oil during the Gulf crises", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 91-116.

[50] Merton, Robert C. (1992), *Continuous Time Finance*, Blackwell Publishers.

[51] Mizrach, B. "Did option prices predict the ERM crisis?, *Rutgers University*, working paper.

[52] Pérignon, C. y Villa, C. (2002) "Extracting information from options markets: smiles, state-price densities and risk aversión", *European Financial Management*, 8, 495-513.

[53] Ritchey, R. J. (1990) "Call option valuation for discrete normal mixtures", *Journal of Financial Research*, Vol. XIII, N°4, 285-296.

[54] Rosenberg, J. V. y Engle, R. F. (2002) "Empirical pricing kernel", *Journal of Financial Economics*, 64, 341-372.

[55] Ross, S. (1973) "Return, risk and arbitrage" *Risk and Return*, ed. I. Friend y J. Bicksler, 189-217, Cambridge: Ballinger.

[56] Ross, S. (1976) "Options and efficiency", *Quarterly Journal of Economics,* Vol. 90, 75-89.

[57] Ross, S. (1978) "A simple approach to the valuation of risky streams", *Journal of Business*, 51, 453-475.

[58] Ross, S (1989) "Intertemporal asset pricing – discussion", *Theory of Valuation, Frontiers of Modern Financial Theory,* Volume 1, Ed. Bhattacharya y Constantinides., Rowman & Littleffield.

[59] Ross, S (2004), *Neoclassical Finance,* Princeton University Press.

[60] Rubinstein, M. (1994) "Implied binomial trees", *Journal of Finance*, 49, 771-818.

[61] Rubinstein, M. (1998) "Edgeworth binomial trees", *Journal of Derivatives*, 5, N°3, 20-27.

[62] Shimko, D. (1993) "Bounds on probability", *RISK*, 6, 33-37.

[63] Soderlind, P. y Svenson, L: (1997) "New techniques to extract market expectations from financial instruments", *Journal of Monetary Economics*, 40, 383-429.

[64] Stutzer, M. (1996) "A simple nonparametric approach to derivative security valuation", *Journal of Finance*, 51, N°3, 1633-1652.

[65] Taylor S. (2005), *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction,* Princeton University Press.

Derivaciones de Fórmulas

A. Derivación de (14)

$$
\begin{aligned}
e^{r\tau}\frac{\partial c}{\partial X} &= e^{r\tau}\frac{\partial}{\partial X}\left(SN(d_1) - Xe^{-r\tau}N(d_2)\right) = \\
&= e^{r\tau}\left(S\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial X} + S\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} - e^{-r\tau}N(d_2) - Xe^{-r\tau}\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial X} - Xe^{-r\tau}\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right) = \\
&= -N(d2) + e^{r\tau}\left(S\phi(d_1) - Xe^{-r\tau}\phi(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial X} + e^{r\tau}\left(S\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} - Xe^{-r\tau}\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right) = \\
&= -N(d2) + e^{r\tau}\left(S\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Xe^{-r\tau}\phi(d_2)\frac{\partial\left(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial \sigma} \right)\frac{\partial \sigma}{\partial X} = \\
&= -N(d2) + e^{r\tau}\left\{ \left[S\phi(d_1) - Xe^{-r\tau}\phi(d_2)\right]\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} + Xe^{-r\tau}\phi(d_2)\frac{\partial\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right\} = \\
&= -N(d_2) + \left(X\phi(d_2)\sqrt{\tau} \right)\frac{\partial \sigma}{\partial X}
\end{aligned}
$$

B. Derivación de (15)

Para esta derivación nos basamos en el resultado obtenido en el punto anterior. En consideración a su extensión hemos decidido omitir algunos pasos y resultados intermedios.

$$
\begin{aligned}
e^{r\tau}\frac{\partial^2 c}{\partial X^2} &= -\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial X} - \phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \sqrt{\tau}\phi(d_2)\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \left(X\sqrt{\tau}\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)\frac{\partial \phi(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial X} + \left(X\sqrt{\tau}\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)\frac{\partial \phi(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \\
&+ X\sqrt{\tau}\phi(d_2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} = \phi(d_2)\frac{1}{X\sigma\sqrt{\tau}} + \phi(d_2)\frac{d_1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \sqrt{\tau}\phi(d_2)\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \left(\frac{d_1}{\sigma}\phi(d_2) - \sqrt{\tau}\phi(d_2) \right)\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \frac{X\sqrt{\tau}d_1 d_2}{\sigma}\phi(d_2)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)^2 + \\
&+ X\sqrt{\tau}\phi(d_2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial X} = \phi(d_2)\left\{ \frac{1}{\sigma X\sqrt{\tau}} + \left(\frac{2d_1}{\sigma} \right)\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \left(\frac{d_1 d_2 X\sqrt{\tau}}{\sigma} \right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)^2 + X\sqrt{\tau}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} \right\}
\end{aligned}
$$