UNIVERSIDAD DEL CEMA

MAESTRIA EN FINANZAS

Árboles Binomiales Implícitos

LUCAS VALLEJOS - FEDERICO LEON

INTRODUCCION

La idea de nuestro trabajo es implementar el árbol binomial implícito desarrollado originalmente por Derman-Kani usando para ello las opciones sobre el índice Nasdaq, valuar opciones usando dicho árbol, y compararlos con los resultados que da el modelo Black and Scholes. Dicho árbol es similar al árbol binomial del tipo Cox, Ross Rubinstein con la salvedad de que la volatilidad usada para calibrarlo es la volatilidad implícita estimada a partir de opciones disponibles en el mercado en vez de una volatilidad histórica constante. Nuestra motivación para hacer esto se debió a que la metodología planteada por ellos incorpora en la valuación la sonrisa de volatilidad observada a partir de los datos del mercado. Sin embargo, los autores no implementan su modelo en un caso real, usando precios del mercado, pues se limitan a un activo imaginario, por lo que no tratan con un problema fundamental, la iliquidez de las opciones especialmente las que tienen una fecha de ejercicio lejana o un strike price muy “out of the Money” o uno muy “in the Money”.

Para llevar a cabo nuestro trabajo elegimos a la “tracking stock” del Nasdaq (QQQQ) por su alta liquidez y por que tiene listado un gran número de opciones. En el momento de nuestra elección, el 24/02/06 el valor de esta acción era de USD 41.26 el cuál fue tomado como precio para el primer nodo, los valores del segundo nodo fueron calibrados con la volatilidad implícita de las opciones con vencimiento en marzo, es decir a 20 días del momento inicial, las del tercer nodo con el vencimiento de abril (49 días), las del cuarto con el vencimiento de mayo (77 días) y las del quinto con las de junio (105 días).

Agradecemos muy especialmente al Prof. M. Delfiner por la ayuda brindada. Todos los errores son responsabilidad de los autores.

ÁRBOLES BINOMIALES IMPLICITOS

Modelo Black & Scholes

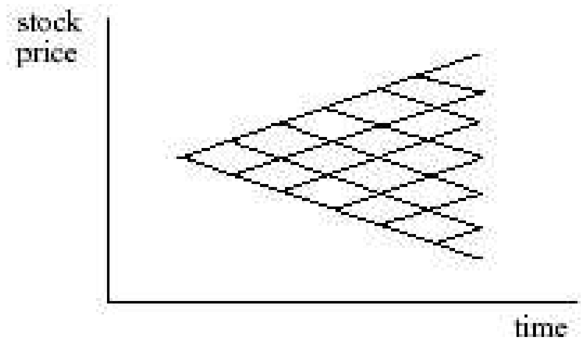
La formula original planteada por Black y Scholes en 1973 permite obtener un precio teórico para una opción sobre una acción que no paga dividendos en función del valor actual del activo subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo que falta para el vencimiento, el tipo de interés libre de riesgo y la volatilidad del activo subyacente. Como se puede observar, de las variables mencionadas anteriormente, la única que es desconocida a la hora de valuar una opción es la volatilidad del subyacente. Por lo tanto, obtener una buena estimación de la volatilidad es crucial para valorar la opción. En la versión original de BS se uso la volatilidad histórica. Con el correr del tiempo el modelo tuvo distintas modificaciones, como la inclusión de dividendos en el activo subyacente y cambios en el cálculo de la volatilidad que permitieron obtener un valor teórico de la opción un poco más cercano al valor del mercado. Sin embargo, a pesar de estas modificaciones el modelo continuo arrojando valores teóricos muy diferentes a los del mercado. Esto se debe principalmente al supuesto que hicieron Black y Scholes, ellos asumieron que los precios evolucionan en forma lognormal con volatilidad constante a lo largo del tiempo e independientemente del nivel de precio de la acción. Como consecuencia de este supuesto la "volatilidad implícita" de cada una de las opciones con diferentes precios de ejercicio va a ser igual a la del activo subyacente.

el supuesto de BS (forma continua),

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ \qquad (1)$$

dónde S es el precio de la acción, μ es el retorno esperado y dZ es un proceso de Wiener con media igual a cero y varianza dt.

Este proceso se vería, en forma discreta, siguiendo un árbol binomial del tipo Cox- Ross - Rubistein, dónde la acción se mueve con volatilidad constante, de la siguiente forma,

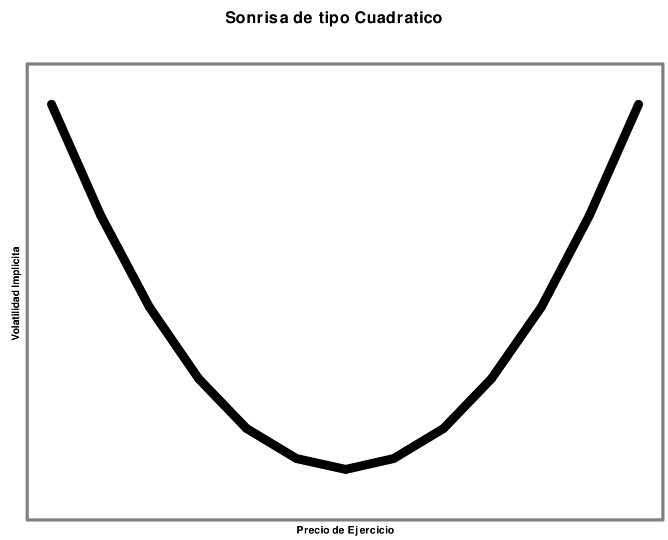


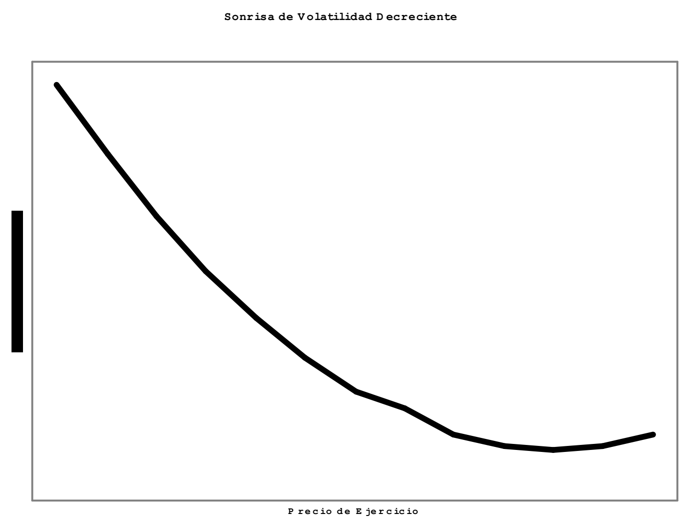
A pesar que la formula de Black-Scholes es, y ha sido, mundialmente utilizada en el mercado de opciones, en los últimos años han aparecido una gran cantidad de estudios poniendo en evidencia importantes falencias a la hora de aplicar la formula en el mercado real, como la diferencia entre los precios de mercado y los obtenidos mediante BS o como cuando se invierte dicha formula para obtener la volatilidad implícita en el precio de mercado de las opciones, se encuentra sistemáticamente que las volatilidades implícitas tienden a estar relacionadas con el precio de ejercicio. Esta característica empírica contradice el supuesto, anteriormente mencionado de Black-Scholes acerca de la volatilidad constante entre distintos precios de ejercicio.

La Volatilidad Implícita y la Sonrisa de Volatilidad

La volatilidad implícita de una opción es el valor de la volatilidad que, introducido en la formula de Black-Scholes, proporciona un precio teórico igual al precio de mercado de la misma.

La relación empírica que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio se ha dado a conocer como la "sonrisa de volatilidad". Esta relación adopta usualmente dos tipos de patrones, ya sea una función cuadrática o bien una función decreciente.





Árboles Implícitos

Los modelos implícitos constituyen uno de los enfoques de valoración de opciones alternativos al modelo de Black-Scholes que ha conocido un mayor desarrollo en los últimos años. Dentro de este planeamiento existen diferentes alternativas: los árboles implícitos, los modelos con función de volatilidad determinista y los modelos con función de volatilidad implícita. Todos ellos se construyen a partir de una estimación de la distribución de probabilidades riesgo-neutral del precio futuro del activo subyacente, congruente con los precios de mercado de las opciones negociadas. En consecuencia, los modelos implícitos proporcionan buenos resultados en la valoración de opciones dentro de la muestra.

La valoración de opciones mediante integración directa de la densidad riesgo-neutral al vencimiento presenta el inconveniente de la necesidad de integrar una función desconocida. Esta función puede resultar difícil de ser integrada mediante procesos analíticos, por lo que en muchos casos se hace necesario utilizar técnicas numéricas de integración. Además, este planeamiento no puede ser aplicado mas que para valoración de opciones de tipo europeo. En consecuencia, una vez obtenida la distribución de probabilidades del activo subyacente implícito en los precios observados de las opciones, puede resultar necesario reconstruir el proceso estocástico que conduce a dicha distribución final. Par este fin son útiles los árboles implícitos, sencillos en su planeamiento y fáciles de implementar.

Los árboles implícitos se pueden interpretar como la versión discreta de los procesos estocásticos de difusión unidimensional, en los que se supone que la volatilidad es una función del tiempo y del precio del subyacente. Este planeamiento conoció un gran empuje a partir del año 1994, con la aparición de tres trabajos en los que tanto la objeción de la distribución riesgo-neutral como la valoración de las opciones se realiza utilizando árboles denominados implícitos. Los modelos propuestos por Rubinstein (1994), Derman y Kani (1994), utilizando árboles binomiales implícitos, y el de Dupire (1994), con árboles trinomiales implícitos, permiten obtener el valor de las opciones a partir de una distribución riesgo-neutral consistente con la "sonrisa de volatilidad", con la ventaja que ofrecen los árboles de probabilidad de cuanto a simplicidad y flexibilidad.

Derman y Kani realizan una propuesta alternativa, en la que el árbol implícito se construye considerando en cada paso un conjunto de opciones con precios de ejercicio iguales a los precios del subyacente de la fase anterior y con vencimiento en el momento inmediatamente posterior. De esta manera, el árbol implícito se construye teniendo en cuenta opciones con diferentes vencimientos, aunque para ello sea necesaria la interpolación y extrapolación de los precios observados de las opciones. La propuesta de Derman y Kani parte del precio de las opciones para deducir la distribución riesgo-neutral del precio futuro del subyacente, y construyen un árbol binomial a partir de los precios de las opciones, en el que esta implícita la distribución riesgo-neutral. De esta manera el modelo de Derman y Kani es más flexible, ya que permite la posibilidad de ajustar la distribución de probabilidades obtenida.

Cuando se utiliza el árbol binomial, propuesto por Derman y Kani, para calcular el valor de la opción utilizada para construir dicho árbol, se observa que los valores producidos concuerdan con los valores de mercado observados. Mediante este árbol se puede calcular la distribución y volatilidad del activo subyacente en cualquier momento del tiempo y niveles del mercado, solamente utilizando el valor de mercado de sus opciones.

La motivación para crear un árbol de volatilidades implícitas, fue la búsqueda de un modelo que pueda tratar la volatilidad implícita de un activo subyacente de manera efectiva y eficiente. Para ello es que se creó el modelo llamado: "Árbol de Volatilidades Implícitas". Este modelo supone que el modelo de Black-Scholes es erróneo, y que el mercado no lo es. Para que esto ultimo sea verdad, hay que asumir que el mercado de opciones es lo suficientemente líquido como para que no haya posibles arbitrajes[1]. Esto hace que las opciones estén correctamente valuadas en el mercado, y que crear un modelo en base a estos precios sea mejor que el modelo BS.

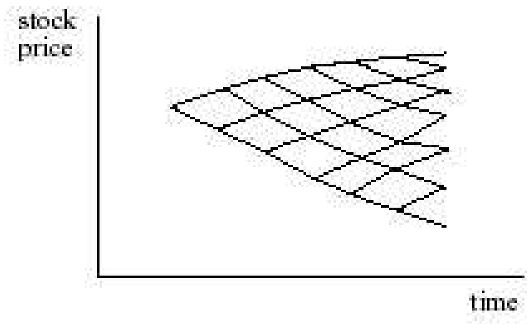
levantando el supuesto de volatilidad constante la fórmula (1) seria reemplazada por la siguiente,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma(S, t)\, dZ \qquad (2)$$

dónde $\sigma(S, t)$, es la función de volatilidad que depende tanto del precio de la acción como del tiempo al igual que en el trabajo de Derman-Kani, $\sigma(S, t)$ será deducido de forma numérica a partir de la sonrisa de volatilidad.

De forma discreta, en un árbol binomial el cambio de la volatilidad constante por una que dependa del tiempo y del precio de la acción se vería reflejado de la siguiente manera,

[1] Este supuesto es a veces un poco fuerte ya que para algunas opciones el mercado no tiene la liquidez suficiente.



Construcción del árbol

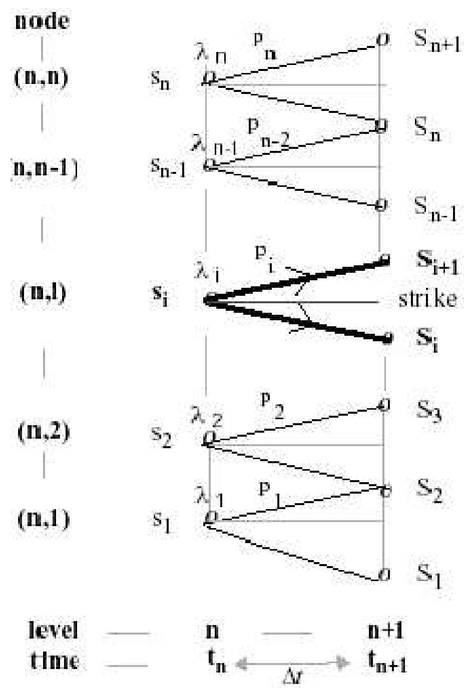
Al igual que Derman Kani usamos "forward induction" para construir el árbol, partimos del precio spot y construimos n periodos en base a la volatilidad implícita de cada una de las opciones. Pasamos de un valor conocido s_i en T_n a dos valores desconocidos S_{i+1} (nodo superior) y S_i (nodo inferior) en T_{n+1}. En el momento T_n conocemos el precio forward F_i = si*rΔt donde rΔt es la tasa libre de riesgo desanualisada para el periodo n. Además conocemos p_i que es la probabilidad neutral al riesgo de pasar al nodo superior y λi es el precio Arrow-Debreu, el cual es la sumatoria de todos los caminos desde la raíz del árbol hasta el nodo (n,i) de las p_i descontadas a la tasa libre de riesgo. Ver figura de la página 8.

Los intervalos entre cada nodo no necesitan ser iguales, nosotros ajustamos cada nodo con una fecha de ejercicio, para el primer nodo usamos el precio spot de QQQQ (41.26), para el segundo nodo la fecha de ejercicio de las opciones de marzo y así hasta el quinto nodo. La tasa de interés libre de riesgo tampoco necesita ser igual en todos los nodos pero nosotros decidimos fijarla en 4.5% ya que este supuesto no modifica significativamente los valores de los nodos.

Hay 2n+1 parámetros que definen la transición del nivel n al n+1. Los n+1 precios de acciones Si y las n probabilidades neutrales al riesgo p_i. Construimos los nodos del nivel n+1 calculando el valor teórico de las 2n cantidades conocidas (los n forwards y las n opciones, todas con fecha de ejercicio t_{n+1}) y matcheando estos precios teóricos con los valores interpolados del mercado[2]. Esto nos deja 2n ecuaciones y 2n+1

[2]Al igual que en paper de Derman – Kani, usamos la volatilidad implícita de los puts para calibrar los nodos inferiores al precio spot y usamos calls para los nodos por encima del precio spot.

parámetros, lo que nos permite igualar el valor central del árbol al precio spot si el numero de nodos en ese nivel es impar y al promedio de los 2 nodos centrales si es par.



como el árbol es neutral al riesgo se de debe cumplir,

$$\mathbf{F_i = p_i\, S_{i+1} + (1 - p_i)\, S_i \qquad (3)}$$

y al igualar el valor del call de mercado con la estructura binomial del call nos queda,

$$\mathbf{C\,(K\,,\; t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{n} \{\lambda_j\, p_j + \lambda_{j+1}\,(1 - p_{j+1})\} \max\,(S_{j+1} - K,\, 0) \qquad (4)}$$

donde la parte izquierda de la ecuación corresponde al valor del call de marcado. Para el caso particular que K sea igual a s_i la ecuación se simplifica a,

$$\mathbf{e^{r\Delta t}\;\; C\,(s_i\,,\; t_{n+1}) = \lambda_i\, p_i\;(S_{i+1} - s_i) + \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_j\,(F_j - s_i) \qquad (5)}$$

si despejamos $S_{i+1,}$

$$S_{i+1} = \frac{S_i\,[e^{r\Delta t}\ C\,(s_i\,,\ t_{n+1}) - \Sigma\,] - \lambda_i\, s_i\ (F_i - S_i)}{[e^{r\Delta t}\ C\,(s_i\,,\ t_{n+1}) - \Sigma\,] - \lambda_i\ (F_i - S_i)} \qquad (6)$$

y recordando que,

$$p_i = \frac{F_i - S_i}{S_{i+1} - S_i} \qquad (7)$$

lo que nos todo lo que necesitamos para armar los nodos de un nivel impar, si el nivel fuese par la fórmula se ve modificada de la siguiente manera,

$$S_{i+1} = \frac{S\,[e^{r\Delta t}\ C\,(S\,,\ t_{n+1}) + \lambda_i\, S - \Sigma]}{\lambda_i F_i - e^{r\Delta t}\ C\,(S\,,\ t_{n+1}) + \Sigma} \qquad \textbf{for } i = n/2 \quad (8)$$

con la condición extra de que $Si = S^2/S_{i+1}$ donde $S = Si$

Análogamente tenemos para los nodos inferiores al precio spot,

$$S_i = \frac{S_{i+1}\,[e^{r\Delta t}\ P\,(s_i\,,\ t_{n+1}) - \Sigma\,] + \lambda_i\, s_i\ (F_i - S_{i+1})}{[e^{r\Delta t}\ P\,(s_i\,,\ t_{n+1}) - \Sigma\,] + \lambda_i\ (F_i - S_{i+1})} \qquad (9)$$

Es imposible obtener un call o un put en el mercado con igual precio de ejercicio a s_i, por esta razón es necesario interpolar la volatilidad implícita de la opción deseada y posteriormente poner este valor en la fórmula de BS para obtener un estimador de la opción deseada. A medida que el numero de nodos van aumentando se hacen necesario calls muy "out of the money" y puts muy "in the money" que tampoco se consiguen en el mercado ni pueden ser interpolados. Derman y Kani no hacen mención acerca de cómo obtener el valor de estas opciones, nosotros decidimos mediante regresiones cuadráticas obtener la volatilidad implícita que le daría a estas opciones si estuviesen listadas.

Árbol binomial implícito

Spot	Marzo	Abril	Mayo	Junio
				48,4622
			46,1830	
		44,5970		44,6227
	42,5853		43,0655	
41,2600		41,2600		41,2600
	39,9758		39,4544	
		36,3821*		36,5473
			34,2324	
				31,1787*

Árbol de probabilidades neutrales al riesgo

Spot	Marzo	Abril	Mayo	Junio
				0,4881
			0,5406	
		0,4428		0,5937
	0,5369		0,5394	
		0,7660		0,6477
			0,4357	
				0,5976

Árbol de probabilidades Arrow Debreu

Spot	Marzo	Abril	Mayo	Junio
				0,0618
			0,1271	
		0,2360		0,3353
	0,5350		0,4570	
1,0000		0,6492		0,4075
	0,4614		0,3446	
		0,1075		0,1570
			0,0604	
				0,0242

[*] Para la construcción de estos nodos se debió usar el precio "bid" de las opciones correspondientes ya que el mercado de estas opciones es iliquido y el "último precio" no estaba actualizado.

Valuación de opciones

Una vez construido el árbol es muy sencillo utilizarlo para valuar opciones, con la ventaja que es mucho más efectivo que otros métodos de valuación. Nosotros lo comparamos con el modelo de BS, el cuál fue calibrado de dos maneras distintas, lo hicimos primero usando la volatilidad histórica (14.26%) como en la versión original y después con la volatilidad implícita del call "at the Money" (precio de ejercicio $41, volatilidad 16.26%) cuando lo usamos para valuar calls y con la volatilidad implícita del put "at the Money" (precio d e ejercicio $41, volatilidad 16.70%). Nuestro fundamento para esta última elección fueron estudios recientes que demuestran que estas volatilidades optimizan el modelo BS. Fácilmente se ve a pesar de que nuestro árbol tenga solo cinco periodos es mucho más preciso que el modelo BS.

Valuación de calls junio, BS VS árbol binomial implícito				
Strike	Mercado	Árbol	BS Volat hist. (14,26%)	BS Volat. Imp. (16,26%
41	1,85	1,7436	1,6796	**1,8499**
42	1,3	**1,2404**	1,1643	1,3413
43	0,85	**0,8432**	0,77	0,9389
44	0,45	**0,446**	0,4852	0,6342
45	0,3	0,1993	**0,2912**	0,4133
46	0,15	**0,1364**	0,1665	0,2599

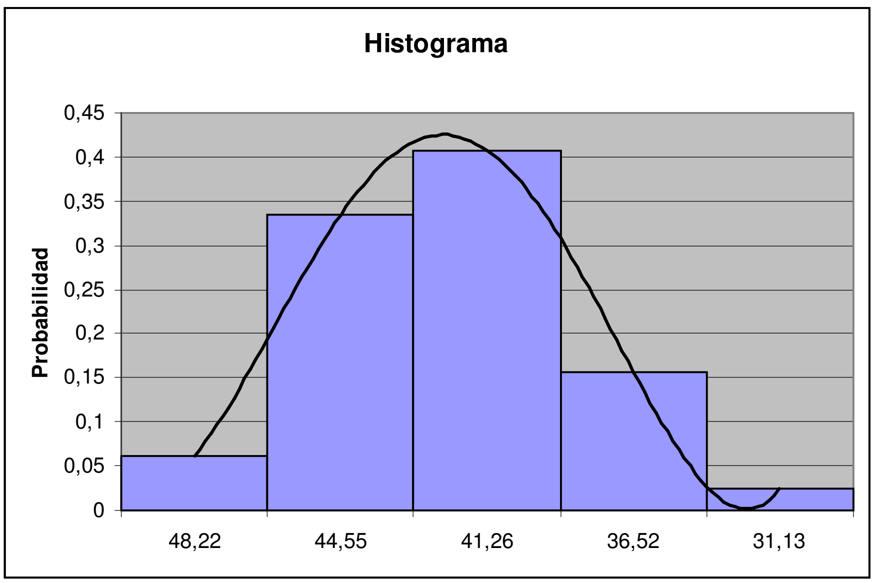
El modelo BS con volatilidad implícita solo fue más preciso, en una oportunidad, para el call con precio de ejercicio igual a 41, esto era obvio dado que se uso dicha volatilidad para calibrar el modelo. Cuando se uso la volatilidad histórica el modelo solo superó al árbol en el call con precio de ejercicio 45, creemos que esto se debió por que la estimación de nuestro árbol no fue buena para ese call en particular y se dio la casualidad que la volatilidad histórica resulto ser muy parecida a la del call con precio de ejercicio 45..

Valuación de puts junio, BS VS árbol binomial implícito				
Strike	Mercado	Árbol	BS Volat hist. (14,26%)	BS Volat. Imp. (16,26%)
35	0,1	**0,0939**	0,0099	0,0302
36	0,15	**0,1182**	0,0282	0,0679
37	0,2	**0,2177**	0,0699	0,1388
38	0,4	**0,3989**	0,1536	0,2598
39	0,6	**0,5802**	0,3028	0,4495
40	0,8	**0,7615**	0,5422	0,7253

En el caso de los puts, ninguna versión del modelo BS, en ninguna de las opciones fue mejor a la estimación obtenida mediante el árbol.

Otros usos del árbol implícito

Del árbol también se puede obtener mediante un histograma la distribución de probabilidad que le asigna el mercado a la acción QQQQ. Lo valioso de este instrumento es que nos da una idea de lo que piensa el mercado que puede pasar con el activo, en este caso se puede ver que se le asigna gran probabilidad a que la acción siga igual o suba.

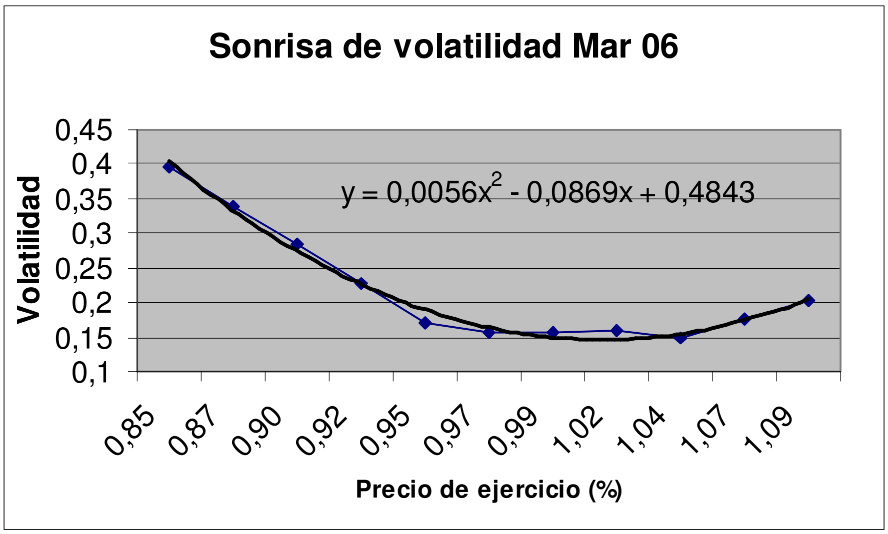


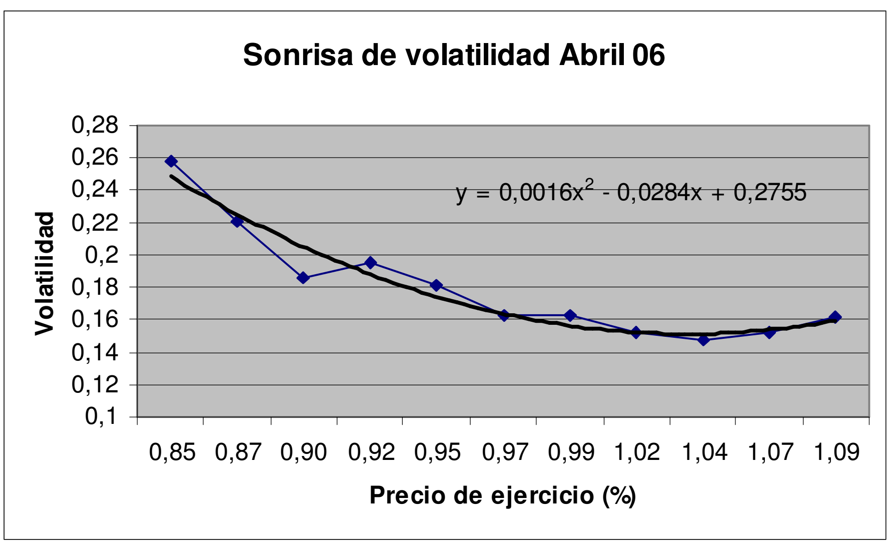
CONCLUSION

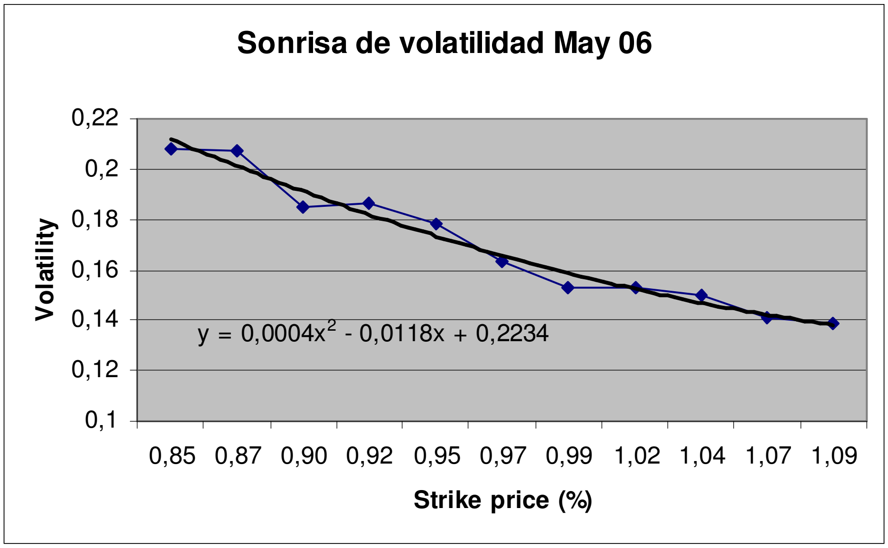
Como se puede ver la implementación de árboles binomiales es posible y relativamente sencilla, para calibrar el árbol no fue necesario más que una planilla de Excel. Además probamos que es mucho más eficiente que el modelo Black and Acholes. Sin embargo, nos percatamos que algunas de las opciones necesarias para armar el árbol no cuenta con la suficiente liquidez, lo que nos lleva a pensar que este tipo de modelos es solo aplicable a acciones extremadamente líquidas con gran número de opciones listadas pero no para activos, como por ejemplo del mercado, argentino.

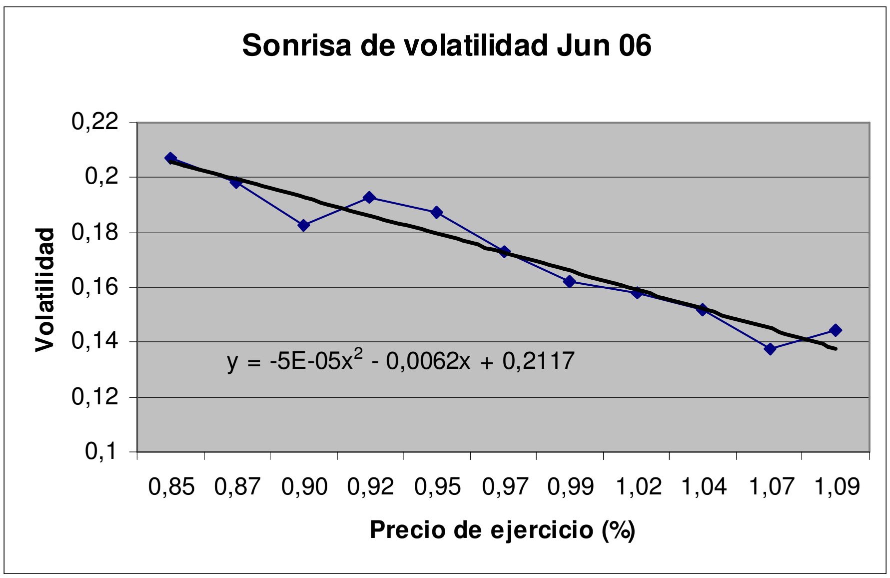
ANEXO

En esta sección se muestra los gráficos de la volatilidad implícita de las opciones para cada fecha de ejercicio. La función que aparece dentro de cada grafico fue empleada solo para extrapolar la volatilidad implícita de opciones con precios de ejercicio inexistentes en el mercado.






Sonrisa de volatilidad May 06
0,22
0,2
0,18
0,16
0,14
0,12
0,1
Volatility
y = 0,0004x2 - 0,0118x + 0,2234
0,85 0,87 0,90 0,92 0,95 0,97 0,99 1,02 1,04 1,07 1,09
Strike price (%)


Sonrisa de volatilidad Jun 06
0,22
0,2
0,18
0,16
0,14
0,12
0,1
Volatilidad
y = -5E-05x2 - 0,0062x + 0,2117
0,85 0,87 0,90 0,92 0,95 0,97 0,99 1,02 1,04 1,07 1,09
Precio de ejercicio (%)

BIBLIOGRAFIA

- "Black – Scholes and Beyond", Neil Chriss
- "The Volatility Smile and Its Implied Tree", Emanuel Derman and Iraj Kani