

**UNIVERSIDAD DEL CEMA
Buenos Aires
Argentina**

Serie
DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Finanzas

**ÍNDICE DE TURBULENCIA FINANCIERA PARA
ARGENTINA MEDIANTE UN MODELO SWARCH**

Emiliano Delfau

**Septiembre 2018
Nro. 656**

**www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding jae@cema.edu.ar**

Índice de turbulencia financiera para Argentina mediante un modelo SWARCH*

Emiliano Delfau**

*Universidad del CEMA,
PhD in Finance,
Argentina*

Septiembre 2018

Resumen

El objetivo del presente trabajo es desarrollar un índice de turbulencia argentino mediante la estimación de un modelo GARCH con proceso Markov (SWARCH). Estos modelos se han vuelto populares dado que permiten explicar cambios de regímenes en la varianza condicional de una serie de tiempo. En nuestro caso particular utilizaremos la tasa Badlar¹ como serie de tiempo a modo de poder obtener dos momentos o regímenes de volatilidad uno denominado “calmo” o de baja volatilidad y otro denominado “turbulencia” o de alta volatilidad.

Palabras Claves: Modelo GARCH, Modelo GARCH con proceso Markov, Cadenas de Markov, Volatilidad condicional, Pronóstico de volatilidad, Agrupamiento de volatilidad.

Introducción

Los modelos más simples de estimación de volatilidad sobre retornos que se denominan comúnmente de “promedio móvil” se basan en la suposición de que, a lo largo del tiempo, los retornos son independientes y están distribuidos de forma idéntica (i.i.d.). Dada esta suposición, los pronósticos de volatilidad y correlación que se estiman a partir de estos modelos son simplemente iguales a las estimaciones actuales. Asimismo, si bien estos modelos son de fácil estimación, existe evidencia empírica que el supuesto i.i.d. es poco realista. La volatilidad de los rendimientos de los activos financieros cambia con el tiempo, encontrando períodos en los que la volatilidad es excepcionalmente alta, intercalada con períodos en los que la volatilidad es inusualmente baja. Este comportamiento de agrupamiento de volatilidad (*volatility clustering*) depende, por supuesto, de la frecuencia de los datos, difícilmente ocurriría en datos anuales, y puede no ser muy evidente en los datos mensuales, pero normalmente es muy obvio en los datos diarios.

Este fenómeno de *volatility clustering* tiene importantes implicancias en la medición y gestión del riesgo y para valuación de precios y cobertura de opciones (derivados). Suele observarse que luego de una gran conmoción o *shock* de mercado, la volatilidad cambia y la probabilidad de otro gran *shock* aumenta considerablemente. Lamentablemente, los modelos de media móvil mencionados anteriormente, aunque son simples, proporcionan sólo una imagen cruda o tosca de la variación de la volatilidad en el tiempo. Esto se debe a que este tipo de modelos suponen que la volatilidad es constante y la única razón por la que cambia en el tiempo es debido a la incorporación de datos en la muestra de estimación. La elección de un modelo GARCH surge del hecho de que la volatilidad condicional de este tipo de modelos se encuentra gobernada por *shocks* ocurridos en la serie de tiempo bajo análisis.

Los modelos GARCH fueron presentados por Bollerslev (1986)[1] como una generalización de los modelos ARCH (la “G” de GARCH, surge del acrónimo inglés de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada) cuyo artículo fue presentado por R. Engle (1982)[2]²

*Modelo GARCH con proceso Markov.

**Las opiniones vertidas en este trabajo son personales del autor y no reflejan necesariamente los puntos de vista de la UCEMA o CEBaFi. Comentarios son bienvenidos en: ed11@ucema.edu.ar

¹Depósitos a plazo fijo de 30 a 35 días de plazo y de más de un millón de pesos suministrados por la totalidad de las entidades bancarias privadas.

²Posteriormente en 2003, R. Engle recibe el premio Nobel por su “contribución a los métodos de análisis de series de tiempo económicas con volatilidad variable en el tiempo (ARCH)”.

Para comprender como funciona un modelo GARCH cabe realizar una breve aclaración sobre la distinción entre el concepto: “varianza incondicional” y “varianza condicional” de una serie temporal de retornos. La “varianza incondicional” es solo la varianza de surge de la distribución de los retornos incondicionales, que se supone constante durante todo el período (datos) considerado. La “varianza incondicional” se la puede considerar como la varianza promedio de largo plazo en ese período considerado. Por ejemplo, si el modelo utilizado es el simple modelo de “retornos i.i.d.”, entonces si quisiéramos, podríamos olvidarnos del ordenamiento de los retornos en la muestra y estimar simplemente la varianza de la muestra utilizando un promedio simple ponderado de retornos al cuadrado o desviaciones medias de los retornos. Esto proporcionaría una estimación de la “varianza incondicional” del modelo i.i.d.

Por otro lado, la “varianza condicional” cambiará en cada momento de tiempo porque estará condicionada por la historia o evolución de los retornos hasta el momento de tiempo de la estimación. Es decir, se toma en cuenta las propiedades dinámicas de los retornos al considerar su distribución en cualquier momento como condicional en toda la información hasta ese punto. La distribución del retorno en el momento t considera todos los retornos pasados hasta (e incluyendo) el momento $t - 1$ como no estocásticos. Denotaremos al “Conjunto de Información”, que es el conjunto que contiene todas los retornos anteriores hasta (e incluyendo) el tiempo $t - 1$, por Γ_{t-1} . Este “Conjunto de Información” contiene todos los precios y retornos que podemos observar.

Finalmente, cabe aclarar (ver apartado ANEXO I para más detalle) que denotaremos como σ_t^2 a la “varianza condicional” en el momento t . Y como mencionamos anteriormente, esta es la varianza en el momento t , condicional al conjunto de información. Es decir, asumiremos que toda la información que existe en el “Conjunto de Información” no es aleatoria dado que tenemos una observación en este. Cuando todas las distribuciones condicionales de los retornos en cada momento de tiempo son normales, se denota como (Carol (2008)[3]):

$$r_t | \Gamma_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

No obstante la ventajas presentadas en la utilización de modelos GARCH varios estudios recientes han demostrado que las predicciones de volatilidad de estos modelos pueden fallar al momento de capturar el verdadero cambio de volatilidad en los casos de cambio de regímenes en la dinámica de la volatilidad (ver por ejemplo, Lamoureux and Lastrapes (1990)[4]; Bauwens et al. (2014)[5]). Una solución a este problema es permitir que los parámetros (coeficientes) del modelo GARCH varíen en el tiempo según el proceso discreto de Markov latente. A este enfoque se lo conoce como el modelo GARCH con proceso Markov (SWARCH). El mismo permite pronosticar volatilidades que pueden adaptarse rápidamente a las variaciones en el nivel de volatilidad incondicional. Los modelos SWARCH se usan principalmente en economía, particularmente en el estudio y análisis de ciclos económicos y finanzas.

Construcción del Índice de Turbulencia

En orden de poder construir el Índice de Turbulencia Financiera se decide trabajar con la evolución de la tasa Badlar (depósitos a plazo fijo de 30 a 35 días de plazo y de más de un millón de pesos suministrados por la totalidad de las entidades bancarias privadas) dado que la misma funciona como *benchmark* para el sistema financiero, las empresas y familias. Es decir, la Badlar marca el nivel de tasa de interés para el resto de las tasas de interés del sistema financiero argentino.

Por un lado, podemos plantear a la Badlar como una especie de “materia prima de los bancos” y por lo tanto, cuanto más elevada o incierta es su evolución, mayor será el interés o el costo de financiamiento que cobren las entidades por las distintas líneas de crédito que ofrecen (crédito para consumo: tarjetas de crédito, préstamos personales y crédito comercial para empresas: adelantos en cuenta corriente) y mayores serán las tasas que se paguen por los depósitos del público. Por otra parte, la tasa Badlar se utiliza como tasa de referencia variable para el pago de bonos nacionales y provinciales emitidos en pesos (Badlar más un porcentaje adicional denominado comúnmente *spread*), de esta manera su evolución afecta de manera directa el financiamiento del sector público dado que impacta en los recursos destinados a pagar interés por parte del fisco.

La Figura 1 muestra la evolución de la tasa Badlar y sus retornos continuos compuestos (logaritmo) diarios desde 2007 hasta fines de Agosto 2018. En la misma podemos apreciar la existencia de los conocidos hechos estilizados observados típicamente en análisis de series de tiempo financieras, a saber: *volatility clustering* (agrupamientos de volatilidad) y la presencia de *outliers* (valores atípicos):

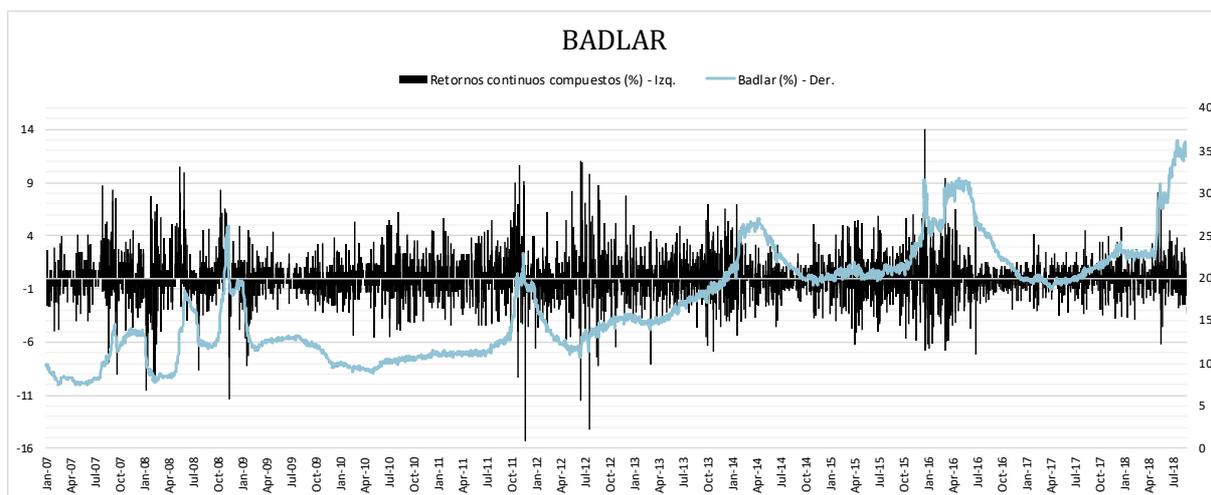


Figura 1: Tasa Badlar Privada Argentina y retornos diarios compuestos continuos (logaritmo), período que va desde el 02 de enero de 2007 hasta el 23 de agosto de 2018, para un total de 2.853 observaciones.

En el modelo de cambio de régimen se establecen de manera exógena 2 regímenes posibles. Es decir en la notación del anexo metodológico $k_t = 2$. El resultado del modelo GARCH con proceso Markov arroja un primer régimen o estado 1 el cual pertenece a un contexto de baja volatilidad o “régimen calmo”, mientras que el régimen o estado 2 pertenece a un contexto de alta volatilidad o de “régimen de turbulencia”. De esta manera, podemos concluir, en términos generales, que la serie histórica de retornos sobre la Badlar se encontrará transitando estos dos regímenes de manera periódica.

Los parámetros estimados del modelo indican que la evolución del proceso de volatilidad es heterogénea en los regímenes establecidos exógenamente. Esto se observa en los diferentes niveles de volatilidad anualizada incondicional de largo plazo³ que presenta el “régimen calmo” y el “régimen de turbulencia” del orden de 27.57% y 59.75% respectivamente.

También podemos observar que los dos regímenes son altamente persistentes en el sentido de que las probabilidades de estado de permanencia de cada uno⁴ son mayores a 50%. Es decir, es más probable permanecer en el régimen actual que migrar al otro. Más precisamente, cuando entramos en el régimen 1 la probabilidad de mantenerse en el mismo entre t y $t + 1$ es del 98.48%, mientras que la probabilidad de pasar de este régimen al estado de “turbulencia” es del 1.52%. Desde el punto de vista del régimen 2, la probabilidad de mantenerse ahí es del 95.49% mientras que la probabilidad de ir hacia el régimen 1 es del 4.51%.

Adicionalmente podemos estimar la duración promedio de cada régimen. El “régimen calmo” tiene una duración promedio de 66 días mientras el “régimen de turbulencia” es de 22 días aproximadamente⁵. Finalmente cabe destacar que las frecuencias incondicionales, es decir, las probabilidades medias de largo plazo, de encontrarse en el régimen de mercado “normal” (o calmo) ocurre en la mayoría de los casos de la muestra, más del 74.77%, mientras que el régimen “estresado” (o turbulencia) ocurre el 25.23% de las veces.

El gráfico superior de la Figura 2 muestra las probabilidades suavizadas de encontrarse en el régimen de volatilidad incondicional alta o “régimen de turbulencia”⁶, superpuesta a los retornos continuos compuestos (logaritmo), así como la volatilidad anualizada (filtrada) del proceso general y el régimen vigente, en el gráfico inferior. Como es de esperar, cuando las probabilidades suavizadas de encontrarse en el régimen 2 se encuentran cerca de 100%, la volatilidad anualizada (filtrada) del proceso aumenta bruscamente y se produce la migración del régimen calmo al de turbulencia.

Claramente, el mercado percibiría al primer régimen como de “condiciones de mercado tranquilas” con bajos niveles de volatilidad, baja persistencia y baja reacción a retornos negativos pasados, mientras que al segundo régimen lo relacionarían como de “condiciones de mercado turbulentas” con altos niveles de volatilidad y fuerte persistencia.

³Surge de la relación $\omega / (1 - \alpha - \beta)$

⁴Definidas por $p_{jj} < 1$

⁵Empleando los resultados estándar de las distribuciones de Poisson, sabemos que el plazo promedio de un régimen es: dado un régimen $K = 1, 2$ con una probabilidad estimada de permanencia $p_{jj} < 1$, la duración promedio estimada, es decir, el tiempo esperado transcurrido en cada régimen, se define como $plazo(j) = 1 / (1 - p_{jj})$

⁶Definidas por $P[s_t = 2 | \Gamma_T]$ para $t = 1, \dots, T$

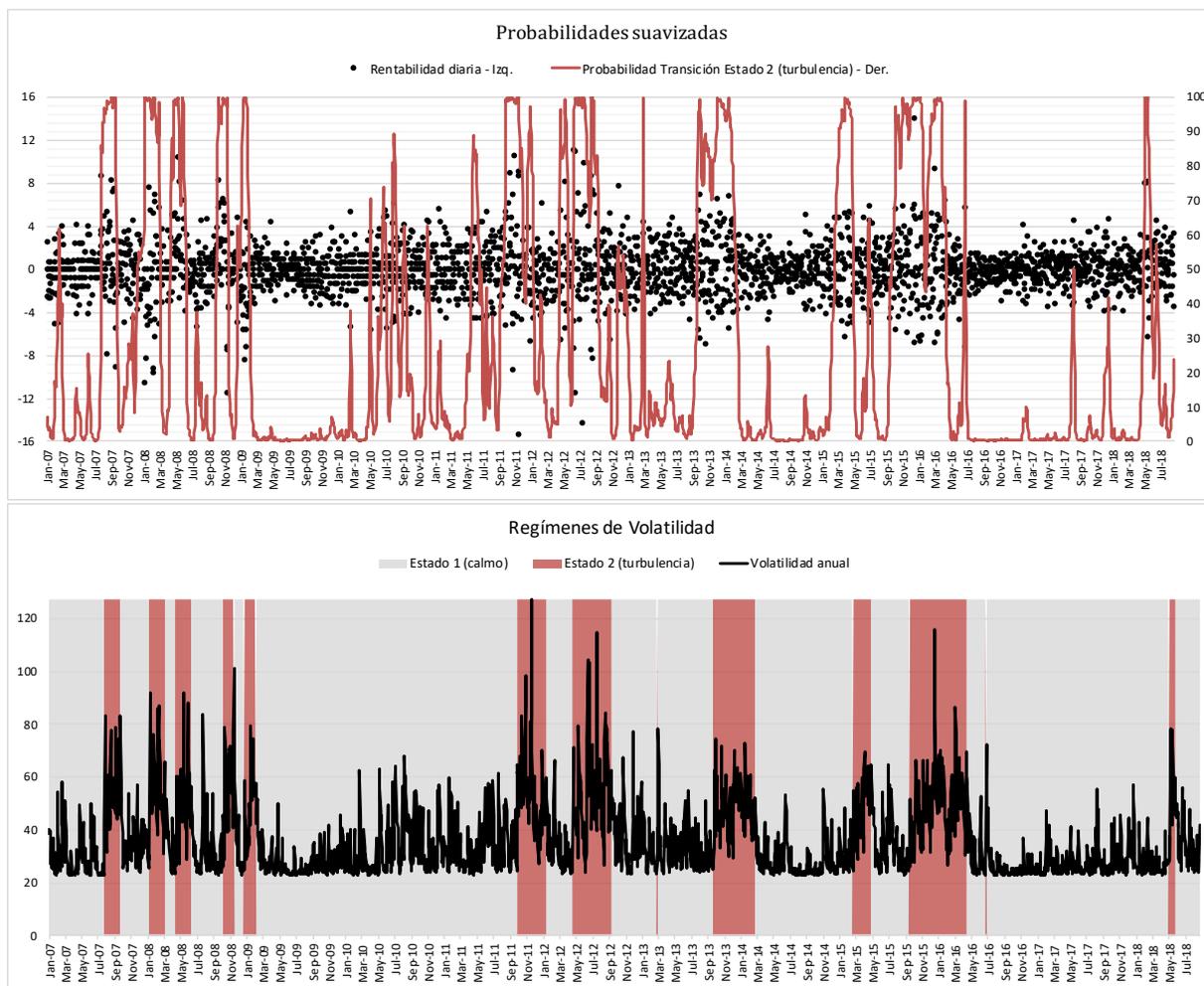


Figura 2: Arriba: Probabilidades suavizadas estimadas del segundo régimen, $P[s_t = 2 | \Gamma_T]$ para $t = 1, \dots, T$. Los pequeños puntos negros representan los retornos continuos compuestos (logarítmico). Abajo: volatilidades anuales condicionales filtradas y estado o régimen vigente subyacente en cada momento de tiempo.

Desde el punto de vista de los coeficientes de los modelos GARCH (ver apartado ANEXO II) podemos destacar los siguientes aspectos: el parámetro α mide la reacción de la volatilidad condicional ante *shocks* de mercado, en este caso ambos estados son heterogéneos dado que $\alpha_1 = 1,6443$ y $\alpha_2 = 8,6550$. Por otra parte dado que β mide la persistencia de la volatilidad, podemos observar que ésta es diferente en cada régimen. Si consideramos el primer régimen este presenta $\beta_1 = 0,1119$ mientras que el segundo $\beta_2 = 0,1902$. Finalmente si tomamos en consideración que $\alpha + \beta$ determina la tasa de convergencia de la volatilidad condicional hacia el nivel de largo plazo, encontramos que el régimen 1 presenta: $\alpha_1 + \beta_1 = 0,46$ y el régimen 2: $\alpha_2 + \beta_2 = 0,39$. El Cuadro 1 resume lo mencionado.

RESUMEN modelo GARCH con proceso Markov

Análisis	Régimen Calmo	Régimen de Turbulencia
• Volatilidad incondicional de LP	27.57	59.75
• Reacción de la volatilidad ante <i>shocks</i>	1.64	8.65
• Persistencia del proceso de volatilidad	0.11	0.19
• Tasa de convergencia de volatilidad condicional hacia el LP	0.46	0.39

Cuadro 1: Resumen de parámetros del modelo GARCH con proceso Markov

En resumen podemos decir que el primer régimen se caracteriza por:

- Baja volatilidad incondicional de largo plazo.

- Menor reacción de la volatilidad ante *shocks* pasados.
- Baja persistencia del proceso de volatilidad.
- Mayor tasa de convergencia de volatilidad condicional hacia el nivel de largo plazo.

Mientras que el segundo régimen se caracteriza por:

- Mayor volatilidad incondicional de largo plazo.
- Mayor reacción de la volatilidad ante *shocks* pasados.
- Alta persistencia del proceso de volatilidad.
- Menor tasa de convergencia de volatilidad condicional hacia el nivel de largo plazo.

Gestión de Riesgo

Predicción de niveles de volatilidad anual

Una de las principales aplicaciones del modelo GARCH con proceso Markov desarrollado se encuentra en el ámbito de las finanzas cuantitativas donde los inversores asignan su riqueza entre una serie de oportunidades de inversión a riesgo. Una primera aproximación en el marco de la gestión de riesgo es poder construir predicciones sobre los distintos regímenes a partir del modelo GARCH con proceso Markov estimado. En nuestro caso encontramos dos regímenes de volatilidad distintos y uno denominado de volatilidad condicional. La Figura 3 de más abajo muestra una proyección a 10 días sobre cada uno de las tres volatilidades mencionadas y se la compara con la volatilidad incondicional de un modelo tradicional.

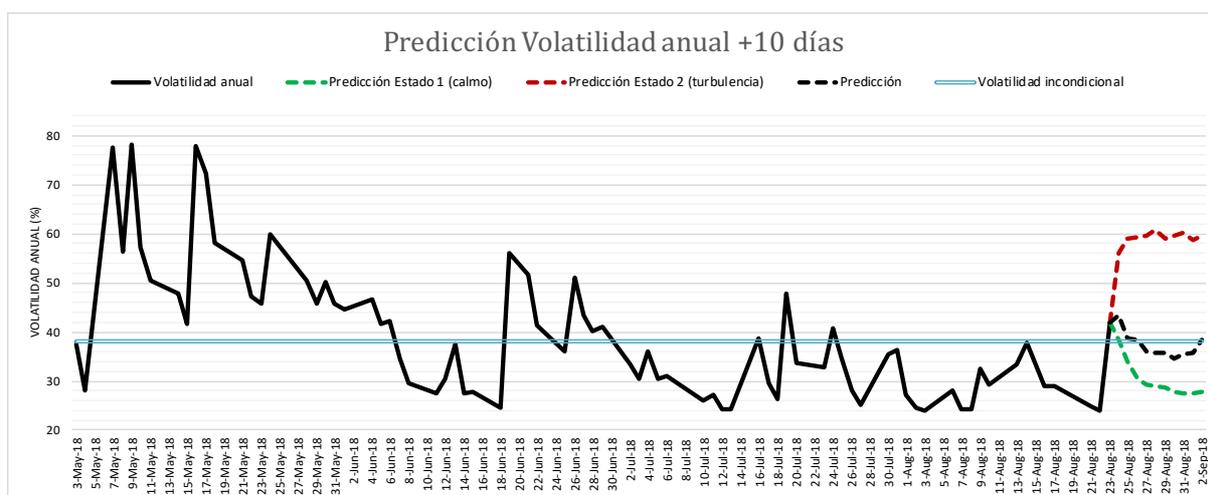


Figura 3: Volatilidad proyectada a 10 días para Régimen Calmo (verde), Régimen de Turbulencia (rojo), Volatilidad Condicional (negro) y Volatilidad Incondicional (celeste)

Valor a Riesgo

Una segunda aproximación dentro del marco de gestión de riesgo es la conocida métrica de *Value at Risk* (VaR) y *Expected Shortfall* (ES). El VaR mide el valor del umbral de modo que la probabilidad de observar una pérdida mayor o igual a éste en un horizonte de tiempo dado sea igual a α . El ES mide la pérdida esperada por debajo del nivel VaR. La Figura 4 de más abajo muestra la evolución de cada una de las métricas a un nivel de confianza del 99%

A modo de realizar la validación de los modelos VaR y ES se procedió a realizar dos tipos de test de bondad de ajuste del modelo. El primer test se denomina *Coverage Test* (para más detalle ver Carol (2008)[6]) y se basa en el conocido test de Kupiec presentado en 1995 el cual determina un número esperado de excepciones (excesos), es decir, aquellos días en que la pérdida del portafolio supera el Var del día anterior. Este test contrasta la hipótesis nula de que la función indicadora definida como: $I_{\alpha,t+1}$ será: $I = 1$ cuando $Y_{t+1} > VaR_{1,\alpha,t}$ o será $I = 0$ cuando $Y_{t+1} < VaR_{1,\alpha,t}$. Siendo Y_{t+1} el retorno realizado sobre el portafolio o P&L sigue un proceso i.i.d. de Bernoulli, tiene probabilidad de éxito constante igual al nivel de significancia del VaR α . Por lo tanto

el test estadístico es:

$$LR = \frac{\pi_{exp}^{n_1} (1 - \pi_{exp})^{n_0}}{\pi_{obs}^{n_1} (1 - \pi_{obs})^{n_0}}$$

Donde π_{exp} es la proporción de excesos esperados, π_{obs} es la proporción de excesos observados, n_1 es el número de excesos observados y $n_0 = n - n_1$ donde n es el set de datos. Para nuestro caso $\pi_{exp} = \alpha = 1\%$ y $\pi_{obs} = n_1/n$. La distribución asintótica de $-2\ln(LR)$ es una Chi-cuadrada con un grado de libertad. En nuestro ejemplo $-2\ln(LR) = 1,3869$ mientras que el valor *Chi-cuadrado* = 6,6349 por lo tanto, al nivel del 1% de significancia, no podemos rechazar la hipótesis nula de que el VaR es preciso o correcto en el sentido de que el número de excesos esperados es cercano al observado.

Para complementar el análisis también realizamos el *Conditional Coverage Test* Christoffersen 1998 (para más detalle ver Carol (2008)[6]). Dicho test combina el *Coverage Test* estimado anteriormente con un test de independencia de excesos (es decir, si los excesos vienen en *clusters*), formalmente:

$$\pi_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \quad \pi_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

Por lo tanto:

$$LR_{condicional} = \frac{\pi_{exp}^{n_1} (1 - \pi_{exp})^{n_0}}{\pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{11}^{n_{11}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}}}$$

La distribución asintótica de $-2\ln(LR)$ es una Chi-cuadrada con dos grado de libertad. En nuestro ejemplo $-2\ln(LR) = 1,3869$ (no existen excesos contiguos). El valor *Chi-cuadrado* = 9,2103 por lo tanto, al nivel del 1% de significancia, no podemos rechazar la hipótesis nula de que el VaR es preciso o correcto en el sentido de que el número de excesos esperados es cercano al observado contemplando excesos contiguos.

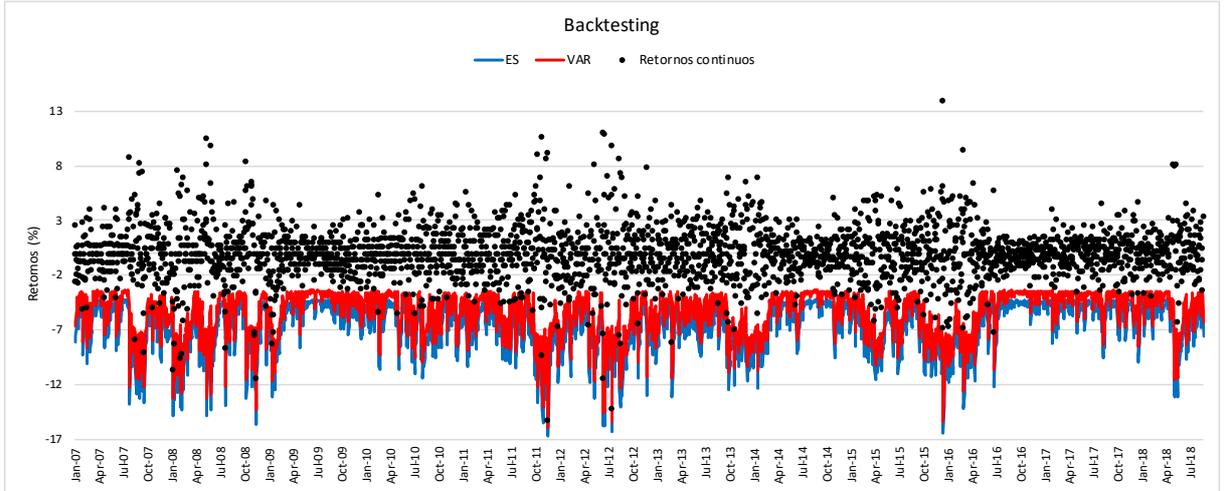


Figura 4: Retornos continuos sobre Badlar, VaR y ES al 99% de confianza

Apetito de Riesgo

Finalmente existe una tercer aproximación a modo de definir un apetito de riesgo en función de la probabilidad suavizada de pasar al estado 2 (turbulencia) tal como se presentó en la Figura 2 (arriba). En orden de definir un apetito de riesgo hemos determinado 3 niveles: un apetito de riesgo (verde) de hasta 40% de probabilidad de transición del estado 1 (calmo) al estado 2 (turbulencia), un nivel de tolerancia al límite (amarillo) de más de 40% y hasta 60% de probabilidad de transición del estado 1 (calmo) al estado 2 (turbulencia) y finalmente un límite (rojo) denotado como más de 60% de probabilidad de transición del estado 1 (calmo) al estado 2 (turbulencia). De esta manera un inversor podrá determinar en qué momento sería más optimo asignar su riqueza entre una serie de oportunidades de inversión a riesgo. En la Figura 5 de más abajo podemos ver la evolución de estos límites a lo largo de distintos momentos de tiempo:

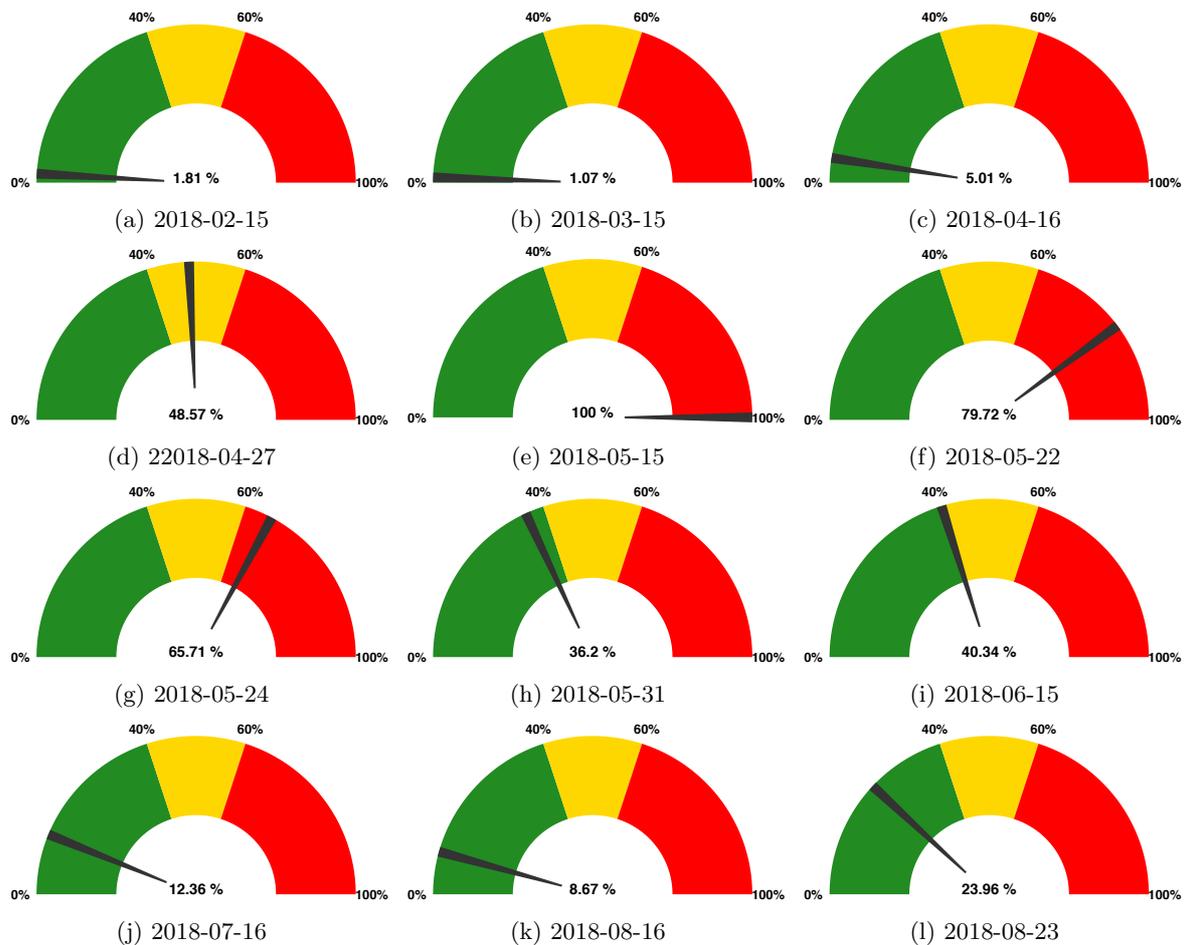


Figura 5: Evolución alertas en función del apetito, tolerancia y límite a riesgo establecidos.

Conclusiones

La volatilidad traducida como incertidumbre de un activo siempre es un tema crucial para cualquier inversor. Desde el punto de vista del presente trabajo nuestro objetivo ha sido desarrollar un “Índice de Turbulencia Financiera” para lo cual hemos seleccionado la tasa Badlar como tasa *benchmark* de mercado dada su relevancia desde el punto de vista de costo de fondeo para empresas y familias. A modo de poder construir dicho índice se ha propuesto desarrollar un modelo GARCH con proceso Markov cuya dinámica se encuentra comprendida en dos estados o regímenes posibles, uno de baja volatilidad o de mercado calmo y otro de alta volatilidad o de turbulencia de mercado.

Los parámetros o coeficientes del modelo arrojan un comportamiento heterogéneo entre ambos regímenes en donde el primer régimen (de mercado calmo) se caracteriza por tener una: a) baja volatilidad incondicional de largo plazo, b) menor reacción de la volatilidad ante *shocks* pasados, c) baja persistencia del proceso de volatilidad y d) mayor tasa de convergencia de volatilidad condicional hacia el nivel de largo plazo. Por otra parte el segundo régimen (de turbulencia de mercado) se caracteriza por tener una: a) mayor volatilidad incondicional de largo plazo, b) mayor reacción de la volatilidad ante *shocks* pasados, c) alta persistencia del proceso de volatilidad y d) menor tasa de convergencia de volatilidad condicional hacia el nivel de largo plazo. Estas características nos permite desarrollar un tablero de gestión de riesgo a modo de poder definir un apetito de riesgo que permita delinear estrategias óptimas.

ANEXO I

Modelo GARCH con proceso Markov

Empleando el desarrollo y parte de la notación de D. Ardia et al. (2016)[7] definimos la variable de interés en el momento t como ε_t . Asumiremos que ε_t tiene media cero y no presenta correlación serial, es decir, se asumen las siguientes condiciones de momento: $E[\varepsilon_t] = 0$ y $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-l}] = 0$ para $l \neq 0$ y todo $t > 0$. Cabe destacar que estos supuestos son realistas en series de retornos de alta frecuencia (diarios) para los cuales se supone a menudo que la media (condicional) es cero; ver, por ejemplo, McNeil et al. (2015)[8].

El modelo GARCH con proceso Markov permite cambio de regímenes en el proceso de varianza condicional. Denotaremos como Γ_{t-1} al conjunto de información observada hasta el momento $t-1$, es decir, $\Gamma_{t-1} \equiv \{\varepsilon_{t-i}, i > 0\}$. La especificación general del modelo GARCH con proceso Markov es:

$$\varepsilon_t \mid (s_t = k, \Gamma_{t-1}) \sim \Theta(0, \sigma_{k,t}^2, \xi_k), \quad (1)$$

donde $\Theta(0, \sigma_{k,t}^2, \xi_k)$ es una distribución continua con media cero, varianza móvil en $\sigma_{k,t}^2$, y un parámetro de “forma” en el vector ξ_k . La variable estocástica de valor entero s_t , definida en el espacio discreto $\{1, \dots, K\}$, caracteriza el modelo GARCH con proceso Markov. Definimos las innovaciones estandarizadas como:
$$\eta_{k,t} \equiv \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{\sigma_{k,t}^2}} \stackrel{iid}{\sim} \Theta(0, \sigma_{k,t}^2, \xi_k).$$

Dinámicas de Estados

Existen dos enfoques conocidos para determinar la dinámica de la variable de estado, a saber: el enfoque de cadena de Markov homogénea ergódica de primer orden (que caracteriza el modelo GARCH con proceso Markov de Haas et al. (2004)[9]), y el enfoque de muestras independientes de una distribución multinomial (que caracteriza los modelos *Mixture*-GARCH de Haas et al. (2004)[10]). El presente trabajo empleará el enfoque de cadena de Markov homogénea ergódica de primer orden.

Cadena de Markov de primer orden

Suponemos que s_t evoluciona de acuerdo a una cadena de Markov no observada homogénea ergódica de primer orden cuya probabilidad de transición es $K \times K$ denotada como P :

$$P \equiv \begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K,1} & \dots & p_{K,K} \end{pmatrix}$$

donde $p_{i,j} \equiv P[s_t = j \mid s_{t-1} = i]$ es la probabilidad de transitar desde el estado $s_{t-1} = i$ al estado $s_t = j$ manteniendo la restricción $0 < p_{i,j} < 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, K\}$, y $\sum_{j=1}^K p_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}$. Dada la parametrización de $\Theta(\cdot)$, tenemos $E[y_t^2 \mid s_t = k, \Gamma_{t-1}] = \sigma_{k,t}^2$, es decir, $\sigma_{k,t}^2$ es la varianza condicional de ε_t basada en la realización $s_t = k$. En el modelo GARCH con proceso Markov presentado por Haas et al. (2004)[9] la varianza condicional $\sigma_{k,t}^2$ para $k = 1, \dots, K$ se asume sigue K tipo de procesos GARCH *separados* que evolucionan en paralelo.

Estados Independientes

Esta especificación ha sido introducida por Haas et al. (2004)[10] y se la conoce como *Mixture of GARCH*. Bajo este modelo, suponemos que s_t es una muestra independientemente en el tiempo a partir de una distribución multinomial con dominio $\{1, \dots, K\}$ y vector de probabilidades $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}^T$, que es $P[s_t = k] = \omega_k$. Tenemos que la misma formulación paramétrica que (1) con K modelos de tipo GARCH *separados* y definidos para cada componente de la mixtura.

Dinámica de la Varianza Condicional

Como en Haas et al. (2004)[9], se supone que la varianza condicional de ε_t sigue un modelo tipo GARCH. Por lo tanto, condicionado al régimen $s_t = k$, $\sigma_{k,t}^2$, se encuentra disponible como una función de la observación

pasada, ε_{t-1} , la varianza pasada $\sigma_{k,t-1}^2$, y el vector adicional correspondiente al parámetro de dependencia de régimen θ_k :

$$\sigma_{k,t}^2 \equiv h(\varepsilon_{t-1}, \sigma_{k,t-1}^2, \theta_k) \quad (2)$$

Donde $h(\cdot)$ es la función mensurable Γ_{t-1} que define el filtro para estimar la varianza condicional y, asimismo, también asegura su positividad. Desde el punto de vista de búsqueda de solución, la recursividad de la varianza, es decir, $k_{k,1}$ ($k = 1, \dots, K$), se establecen o parten del valor de la varianza incondicional correspondiente al régimen k . Dependiendo de la forma de $h(\cdot)$ obtenemos diferentes especificaciones. Finalmente cuando $K = 1$, volvemos al modelo GARCH de régimen simple identificado bajo la forma $h(\cdot)$.

Modelo ARCH

El modelo ARCH de Engel (1982) se encuentra especificado por:

$$\sigma_{k,t}^2 \equiv \alpha_{0,k} + \alpha_{1,k}\varepsilon_{t-1}^2$$

Para $k = 1, \dots, K$. En este caso, tenemos que $\theta = (\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k})^T$. Para asegurar la positividad se requiere que $\alpha_{0,k} > 0$ y que $\alpha_{1,k} \geq 0$. La estacionalidad en covarianza de cada régimen se obtiene mediante la restricción $\alpha_{1,k} < 1$.

Modelo GARCH

El modelo GARCH de Bollerslev (1986) se encuentra especificado por:

$$\sigma_{k,t}^2 = \omega_k + \alpha_k\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_k\sigma_{k,t-1}^2$$

Para $k = 1, \dots, K$. En este caso, tenemos que $\theta = (\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \beta_k)^T$. Para asegurar la positividad se requiere que $\alpha_{0,k} > 0$ que $\alpha_{1,k} \geq 0$ y que $\beta_k \geq 0$. La estacionalidad en covarianza de cada régimen se obtiene mediante la restricción $\alpha_{1,k} + \beta_k < 1$.

Ecuación de media condicional

En la ecuación (1), α_1 denota el *shock* de mercado o *rendimiento inesperado* y se supone que sigue un proceso normal condicional con valor esperado cero y varianza condicional variable en el tiempo. El *shock* del mercado comúnmente se toma como la desviación media ($r_t - \bar{r}$) donde r_t es el retorno en el momento t y $\bar{r} = T^{-1} \sum_{t=1}^T r_t$ es la media muestral. De manera más general, el *shock* del mercado es el “término de error” de una regresión lineal simple. De hecho, un modelo GARCH consiste en dos ecuaciones: una ecuación de varianza condicional como (1) y una “ecuación de media condicional”, que especifica el comportamiento de los retornos. El término de error ε_1 del modelo GARCH es el proceso de error en la ecuación de la media condicional. Si hipotéticamente no nos molestásemos en especificar la ecuación de media condicional en el modelo, esto implica que suponemos la ecuación de retorno media condicional es la más simple, es decir:

$$r_t = c + \varepsilon_t$$

Donde c es la constante. Dado que la estimación de mínimos cuadrados (OLS) de c es \bar{r} , a menudo suponemos que $\varepsilon_t = r_t - \bar{r}$, como se mencionó anteriormente. Sin embargo, para incluir la posibilidad de que los retornos estén autocorrelacionados, la ecuación media condicional podría ser un modelo autorregresivo como:

$$r_t = c + \rho r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Volatilidad de largo plazo

En ausencia de *shocks* de mercado, la varianza del modelo GARCH eventualmente se estabilizará en un valor estable. Este es el valor $\bar{\sigma}^2$ tal que $\sigma_t^2 = \bar{\sigma}^2$ para todo t . Llamamos $\bar{\sigma}^2$ a la “varianza incondicional” del modelo GARCH. La misma corresponde a un valor promedio de la varianza condicional a largo plazo. Cabe aclarar que el valor teórico de la varianza incondicional o valor GARCH a largo plazo no es el mismo valor

que se obtiene de estimar la varianza incondicional en un modelo de volatilidad promedio móvil. La varianza incondicional de un modelo de media móvil se denomina varianza *i.i.d.* dado que se basa en el supuesto de que los retornos siguen un proceso *i.i.d.* Mientras que el valor teórico de la varianza incondicional de un modelo GARCH no se basa en el supuesto de que los retornos siguen un proceso *i.i.d.* De hecho, la varianza incondicional del modelo GARCH varía dependiendo del tipo de modelo GARCH. La varianza de largo plazo o incondicional se puede derivar si sustituimos $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \bar{\sigma}^2$ en la ecuación de varianza condicional del modelo GARCH. Por ejemplo, para el modelo GARCH normal simétrico empleado usamos el hecho de que $E(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma_{t-1}^2$ y luego ponemos $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \bar{\sigma}^2$ en (II.4.1) para obtener:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)}$$

La volatilidad incondicional (también llamada volatilidad a largo plazo) del modelo GARCH simétrico es la raíz cuadrada anualizada de la ecuación anterior.

Parámetros del modelo GARCH simple

Las restricciones $\omega > 0$ y $\alpha + \beta < 1$ son necesarias a modo de que la varianza incondicional sea positiva y finita. Los parámetros del modelo GARCH normal y simétrico tienen una interpretación natural en términos de reacción a los *shocks* de mercado y la reversión de volatilidad media después de un *shock*:

- El parámetro de error del modelo GARCH α mide la reacción de la volatilidad condicional a las perturbaciones o *shocks* del mercado. Cuando α es relativamente grande (por ejemplo, por encima de 0.1), la volatilidad es muy sensible a los acontecimientos (*shocks*) de mercado.
- El parámetro de retardo del modelo GARCH β mide la persistencia en la volatilidad condicional independientemente de lo que ocurra en el mercado. Cuando β es relativamente grande (por ejemplo, por encima de 0.9), la volatilidad tarda mucho tiempo en desaparecer tras una crisis o *shock* en el mercado.
- La suma $\alpha + \beta$ determina la *tasa de convergencia* de la volatilidad condicional al nivel promedio a largo plazo. Cuando $\alpha + \beta$ es relativamente grande (por ejemplo, por encima de 0.99), la estructura sobre la volatilidad pronosticada del modelo GARCH es relativamente plana.
- El parámetro constante GARCH ω , junto con la suma $\alpha + \beta$, determina el nivel de volatilidad promedio a largo plazo, es decir, la volatilidad incondicional en el modelo GARCH. Cuando $\frac{\omega}{1 - \alpha + \beta}$ es relativamente grande (su magnitud está relacionada con la magnitud de los rendimientos al cuadrado), entonces la volatilidad a largo plazo en el mercado es relativamente alta.

Otros Modelos

Existen otros tipos de modelos como: EGARCH Nelson (1991), GJR Glosten et al. (1993), TGARCH Zakoian (1994) que se encuentran fuera de alcance del trabajo.

Dinámica de la Varianza Condicional

Para finalizar la especificación del modelo es necesario definir la distribución condicional de las innovaciones estandarizadas $\eta_{t,k}$ en cada régimen de la cadena de Markov. Las distribuciones financieras comúnmente empleadas al momento de estimar retornos continuos compuestos (logarítmicos) son las siguientes: *Distribución Normal*, *Distribución T-Student*, *Distribución GED* y otras *Distribuciones Asimétricas*. Cada distribución se encuentra estandarizada a modo de tener media cero y una varianza unitaria. En nuestro trabajo se asume que los retornos continuos compuestos siguen una *Distribución Normal*.

Estimación del Modelo

La estimación del modelo GARCH con proceso Markov y *Mixture* de GARCH con proceso Markov puede realizarse por medio de *Maximum Likelihood* (ML) o mediante *Markov Chain Monte Carlo* MCMC/Bayes. Ambos enfoques requieren la evaluación de la *likelihood* función. Denotamos como $\Psi \equiv (\theta_1, \xi_1, \dots, \theta_K, \xi_K, P)$ el vector de parámetros del modelo. Entonces la *likelihood* función es:

$$L(\Psi | \Gamma_T) \equiv \prod_{t=1}^T f(y_t | \Psi, \Gamma_{t-1}) \quad (3)$$

Donde $f(y_t | \Psi, \Gamma_{t-1})$ denota la densidad de y_t dadas las observaciones pasadas, Γ_{t-1} , y los parámetros del

modelo Ψ . Para el modelo GARCH con proceso Markov, la densidad condicional de y_t es:

$$f(y_t | \Psi, \Gamma_{t-1}) \equiv \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_{i,j} z_{i,t-1} f_D(y_t | s_t = j, \Psi, \Gamma_{t-1}) \quad (4)$$

Donde $z_{i,t-1} \equiv P[s_{t-1} = i | \Psi, \Gamma_{t-1}]$ representa la probabilidad “filtrada” del estado i en el tiempo $t-1$ estimado a través del filtro de Hamilton (ver Hamilton (1989) and Hamilton (1994, Capítulo 22)) para más detalles. De manera similar, para el modelo *Mixture* de GARCH con proceso Markov la densidad condicional de y_t es:

$$f(y_t | \Psi, \Gamma_{t-1}) \equiv \sum_{j=1}^K w_j f_D(y_t | s_t = j, \Psi, \Gamma_{t-1}) \quad (5)$$

En (4) y (5), la densidad condicional de y_t en estado/componente $s_t = k$ dado Ψ y Γ_{t-1} se denota mediante $f_D(y_t | s_t = k, \Psi, \Gamma_{t-1})$. La estimación ML denotada por $\hat{\Psi}$ se obtiene mediante la maximización del logaritmo de (3). Para la estimación MCMC se combina la función *likelihood* con una función difusa (truncada) $f(\Psi)$ a modo de poder construir el núcleo de la distribución posterior $f(\Psi | \Gamma_T)$ (ver Ardia (2008)[11]). El presente trabajo calcula los parámetros del modelo GARCH con proceso Markov mediante una estimación MCMC.

ANEXO II

Tablas de Resultado

Muestra posterior (tamaño: 2500)					
	Mean	SD	SE	TSSE	RNE
ω_1	1.6443	0.2117	0.0042	0.0137	0.0952
α_1	0.3471	0.0281	0.0006	0.0012	0.2236
β_1	0.1119	0.0637	0.0013	0.0047	0.0748
ω_2	8.6550	1.5381	0.0308	0.0701	0.1923
α_2	0.2033	0.0257	0.0005	0.0014	0.1410
β_2	0.1902	0.0843	0.0017	0.0041	0.1710
$P_{1,1}$	0.9848	0.0046	0.0001	0.0002	0.1783
$P_{2,1}$	0.0451	0.0105	0.0002	0.0004	0.2648
DIC:	12323.0863				

Cuadro 2: Resumen Ajuste MCMC GARCH con proceso Markov

	$t+1 k=1$	$Et+1 k=2$
$t k=1$	98.48	1.52
$t k=2$	4.51	95.49

Cuadro 3: Matriz de transición media posterior

Estado 1	Estado 2
74,77	25,23

Cuadro 4: Probabilidades estables medias posteriores

La distribución posterior de los modelos de tipo *Mixture* y GARCH con proceso Markov frecuentemente exhibe formas no elípticas que pueden conducir a estimaciones no confiables sobre la incertidumbre de los parámetros del modelo (véase, por ejemplo, Ardia et al., 2009). Lamentablemente este hecho invalida el uso de distribución

Estado 1	Estado 2
27.56599	59.74809

Cuadro 5: Volatilidad incondicional anual

asintótica de Gauss para propósitos de inferencia en muestras finitas.

Un aspecto a destacar sobre la estimación “bayesiana” es que podemos hacer afirmaciones sobre las distribuciones (probabilísticas) sobre cualquier función (posiblemente no lineal) de los parámetros del modelo. Esto se logra mediante procesos de simulación. Es decir, por ejemplo, para cada resultado en la muestra posterior podemos calcular la volatilidad incondicional en cada régimen, y obtener así su distribución posterior. La Figura 6 a continuación muestra las distribuciones posteriores de la volatilidad anualizada incondicional en cada régimen. En el régimen de baja volatilidad, la distribución se centra alrededor del 27.57 % anual. Para el régimen de alta volatilidad, la distribución se centra alrededor del 59.75 % anual. Los intervalos de confianza al 95 % dadas por el enfoque “bayesiano” son [25.65 %, 29.49 %] y [54.44 %, 65.79 %], respectivamente.

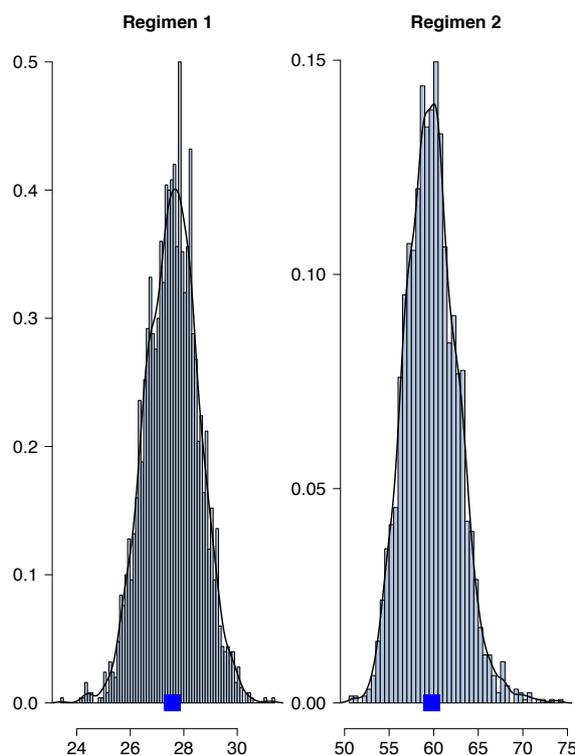


Figura 6: Tasa Ba

Finalmente se presentan cuadros que proporciona estadísticas descriptivas clásicas, es decir: mínimo, máximo, mediana, media, desviación estándar, asimetría y curtosis. Por defecto, se proporcionan estimaciones imparciales de las tres últimas estadísticas. En las Figuras 7 y 8, se muestran los valores de las distribuciones comunes (asimetría y curtosis) a modo de poder determinar a qué distribución se ajustan mejor los datos. Obviamente, para algunas distribuciones (normal, uniforme, logística, exponencial), solo hay un valor posible para la asimetría y la curtosis. Por lo tanto, la distribución está representada por un único punto en la figura (cruz, triángulo, asterisco, etc.). Para otras distribuciones, la figura presenta áreas de posibles valores, que consisten en líneas punteadas (para las distribuciones gamma y lognormal), o áreas más grandes sombreadas (para la distribución beta).

No obstante cabe mencionar que tanto la asimetría como la curtosis son valores de la distribución conocidos por no ser robustos. Es por eso que para tener en cuenta la incertidumbre de los valores estimados de la curtosis y la asimetría de los datos, se realiza un proceso de simulación no paramétrico denominado *bootstrap* (Efron y Tibshirani (1994)[12]). Los valores de asimetría y curtosis (en naranja) se calculan en muestras *bootstrap* y se construyen mediante un proceso de muestreo aleatorio con reemplazo del conjunto de datos original arrojando valores que se aproximan a una distribución normal.

min:	23.4390
max:	31.3341
median:	27.5877
mean:	27.5660
estimated sd:	0.9926
estimated skewness:	-0.0667
estimated kurtosis:	3.1546

Cuadro 6: Summary statistics Unconditional volatility State 1

min:	50.6323
max:	74.0019
median:	59.6451
mean:	59.7481
estimated sd:	2.9310
estimated skewness:	0.4107
estimated kurtosis:	3.7752

Cuadro 7: Summary statistics Unconditional volatility State 2

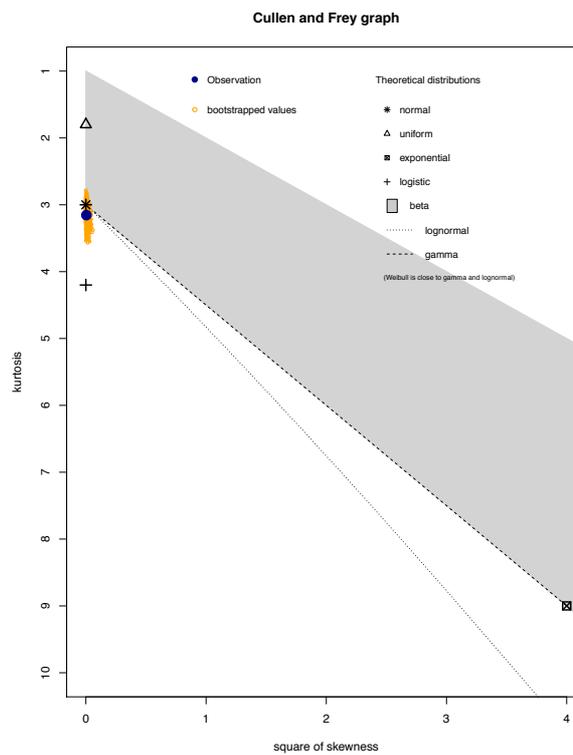


Figura 7: Aproximación Distribución Normal mediante *bootstrap*. Unconditional volatility State 1.

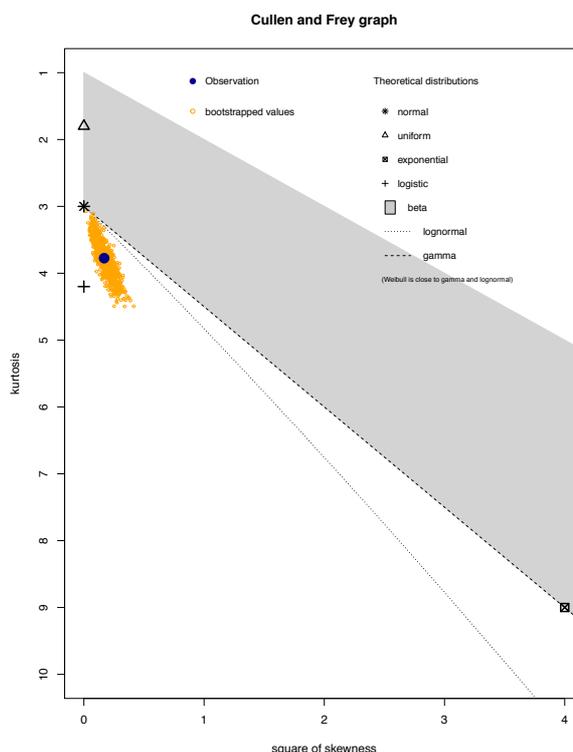


Figura 8: Aproximación Distribución Normal mediante *bootstrap*. Unconditional volatility State 2.

Referencias

- [1] Bollerslev T *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.*, 1986. Journal of Econometrics, 31(3), 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1.
- [2] Engle RF *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation.*, 1982. Econometrica, pp. 987–1007. doi:10.2307/1912773.
- [3] Alexander C *Market Risk Analysis Volume II Practical Financial Econometrics*, 2008. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN 9780470998014
- [4] Lamoureux CG, Lastrapes WD *Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model.*, 1990. Journal of Business & Economic Statistics, 8(2), 225–234. doi: 10.2307/1391985.
- [5] Bauwens L, Backer B, Dufays A *A Bayesian Method of Change-Point Estimation with Recurrent Regimes: Application to GARCH Models.*, 2014. JJournal of Empirical Finance, 29, 207–229. doi:10.1016/j.jempfin.2014.06.008.
- [6] Alexander C *Market Risk Analysis Volume IV Value at Risk Models*, 2008. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN 9780470997888.
- [7] Ardia D, et al. *Markov Switching GARCH Models in R: The MSGARCH Package*, 2016. SSRN. Journal of Statistical Software, Forthcoming.
- [8] McNeil AJ, et al. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. 2nd edition*, 2015. Princeton University Press. ISBN 9780691166278.
- [9] Haas M, Mittnik S, Paoletta MS. *A New Approach to Markov-Switching GARCH Models.*, 2004. Journal of Financial Econometrics, 2(4), 493–530. doi:10.1093/jjfinec/nbh020.
- [10] Haas M, Mittnik S, Paoletta MS. *Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity.*, 2004. Journal of Financial Econometrics, 2(2), 211–250. doi:10.1093/jjfinec/nbh009.

- [11] Ardia D. *Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models: Theory and Applications.*, 2008. Jvolume 612 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-540-78657-3. ISBN 978-3-540-78656-6.
- [12] Efron B, Tibshirani RJ. *An Introduction to the Bootstrap. 1st edition.*, 1994. Chapman & Hall.