

UNIVERSIDAD DEL CEMA
Buenos Aires
Argentina

Serie
DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Ingeniería

**DETECCIÓN DE PATRONES EN
SEÑALES TEMPORALES**

Gabriel Pérez Lance

Diciembre 2019
Nro. 709

www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding jae@cema.edu.ar

Detección de patrones en señales temporales

Gabriel Pérez Lance ¹

Resumen

Una señal representa la evolución de una magnitud física a través del tiempo. El modo en que esa función temporal cambia, aporta información y puede contener determinados patrones. El conocimiento del momento en que tiene lugar un patrón previamente especificado, es de suma importancia para muchas aplicaciones.

Se analiza cómo aplicar la teoría de la información y los conceptos de convolución y correlación de señales, para determinar en qué momento tiene lugar un determinado evento dentro de una señal dada. Se utilizan los modelos desarrollados en un caso concreto, de modo tal de observar su utilidad y contrastar los resultados con las observaciones realizadas.

1. Introducción

En un sistema de radar, se emite una señal y luego se detecta el reflejo de la misma, con el consiguiente retardo en función de la distancia a que se encuentra el objeto. La señal reflejada no es exactamente igual a la original, pues inevitablemente va a estar contaminada con ruido propio del medio, podrá sufrir algún tipo leve de distorsión, y también va a ser diferente su intensidad. Sin embargo, hay algo en ella que la identifica con la original, existe un patrón; de hecho si fuera una señal audible uno podría interpretar si se trata de la misma señal, o no, del mismo modo que cuando alguien habla es posible identificar el timbre de voz independientemente - dentro de ciertos límites - del nivel y del ruido exterior que exista. También se podría desear ubicar, dentro de una grabación de varias horas, en qué momento se dijo una determinada frase, sin tener que escuchar todas esas horas de grabación. En ambos casos, se trata justamente de ubicar un determinado patrón, dentro de una dada señal.

2. Desarrollo

Sean $x(t)$ e $y(t)$, dos señales temporales representadas por funciones reales de variable real. Por definición, el producto convolución entre $x(t)$ e $y(t)$, se define como:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

Si ahora definimos $z(t) = y(-t)$, entonces

¹Los puntos de vista expresados en esta publicación son los del autor y no necesariamente los de la Universidad del CEMA.

$$x(t) * z(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) z(\tau - t) d\tau \quad (2)$$

pero por definición, la ecuación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) z(\tau - t) d\tau = x(t) \star z(t) \quad (3)$$

representa la correlación cruzada entre las señales reales $x(t)$ y $z(t)$. Por lo tanto:

$$x(t) * z(-t) = x(t) \star z(t) \quad (4)$$

El espectro de una señal $x(t)$, está definido según:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

$X(\omega)$ es la *Transformada de Fourier* de $x(t)$.

Según propiedades de la *Transformada de Fourier*, el producto convolución entre señales temporales, se corresponde con el producto de sus respectivas transformadas:

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(\omega) Y(\omega) \quad (6)$$

Además, una inversión temporal implica una inversión en el espectro:

$$\mathcal{F}\{z(-t)\} = Z(-\omega) \quad (7)$$

Entonces, si denominamos $r(t)$ a la correlación cruzada entre $x(t)$ y $z(t)$, teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores:

$$\mathcal{F}\{r(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \star z(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * z(-t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(\omega) Y(\omega) \quad (8)$$

es decir que

$$R(\omega) = X(\omega) Z(-\omega) \quad (9)$$

donde $R(\omega)$ es la *Transformada de Fourier* de $r(t)$.

Si expresamos $r(t)$ en términos de su transformada inversa, tenemos que:

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (10)$$

Si ahora consideramos el caso en que las señales $x(t)$ e $z(t)$ coincidieran, entonces

$$R(\omega) = X(\omega) X(-\omega) \quad (11)$$

Se observa entonces que $R(\omega)$ es par. Y dado que las señales temporales, por hipótesis, son reales, entonces sus espectros tienen módulo par y fase impar; por lo tanto:

$$R(\omega) = X(\omega) X(-\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)} |X(-\omega)| e^{j\phi(-\omega)} = |X(\omega)|^2 \quad (12)$$

entonces la autocorrelación será:

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega \quad (13)$$

aplicando la relación de Euler

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \quad (14)$$

y por conceptos de paridad y simetría, se obtiene que:

$$r(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |X(\omega)|^2 \cos(\omega t) d\omega \quad (15)$$

donde se observa que para $t = 0$, $r(t)$ alcanza su máximo valor. Es decir que $r(t)$ permitiría detectar cuándo existe similitud entre dos señales temporales.

A modo de ejemplo, consideremos una señal $z(t)$

$$z(t) = e^{-0,1t^2} \sin(7t - 2) \quad (16)$$

cuyo gráfico temporal se muestra en la figura.

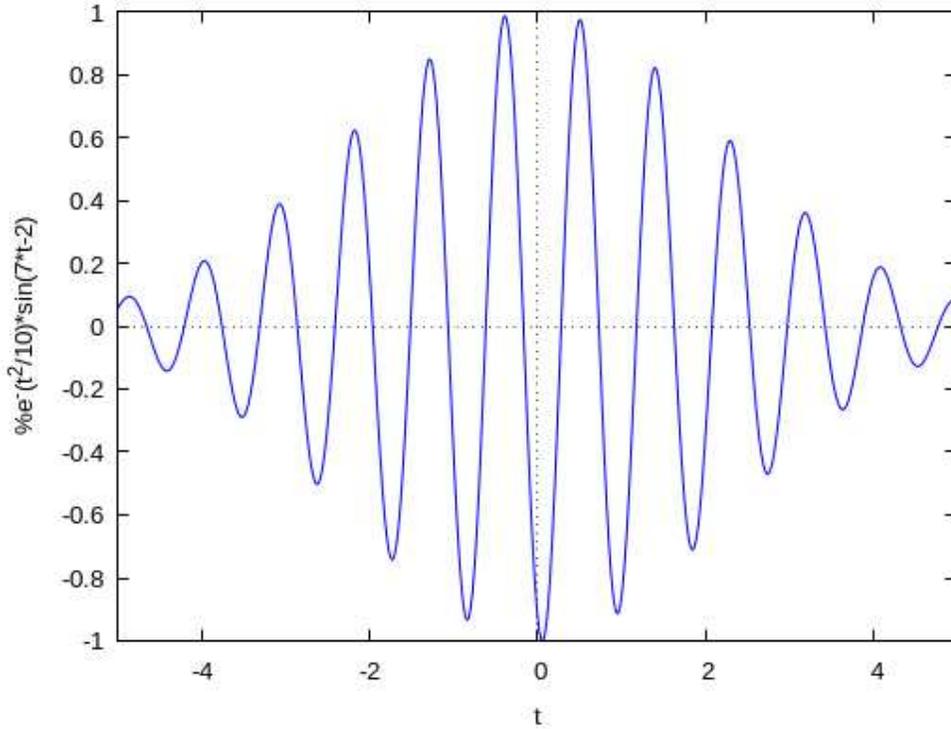


Figura 1: señal patrón $z(t)$

Esta señal $z(t)$ representa un patrón que queremos buscar dentro de otra señal $x(t)$

La señal $x(t)$ está dada por:

$$x(t) = z(1,33(t - 4,5)) + z(t - 14) + z(1,41(t - 22)) + z(0,7(t - 32)) \quad (17)$$

Según se puede observar, $x(t)$ es una señal que posee cuatro zonas temporales bien definidas, donde la segunda zona corresponde al patrón desplazado. El resto de las zonas son versiones distorsionadas de dicho patrón.

La figura muestra el gráfico de $x(t)$

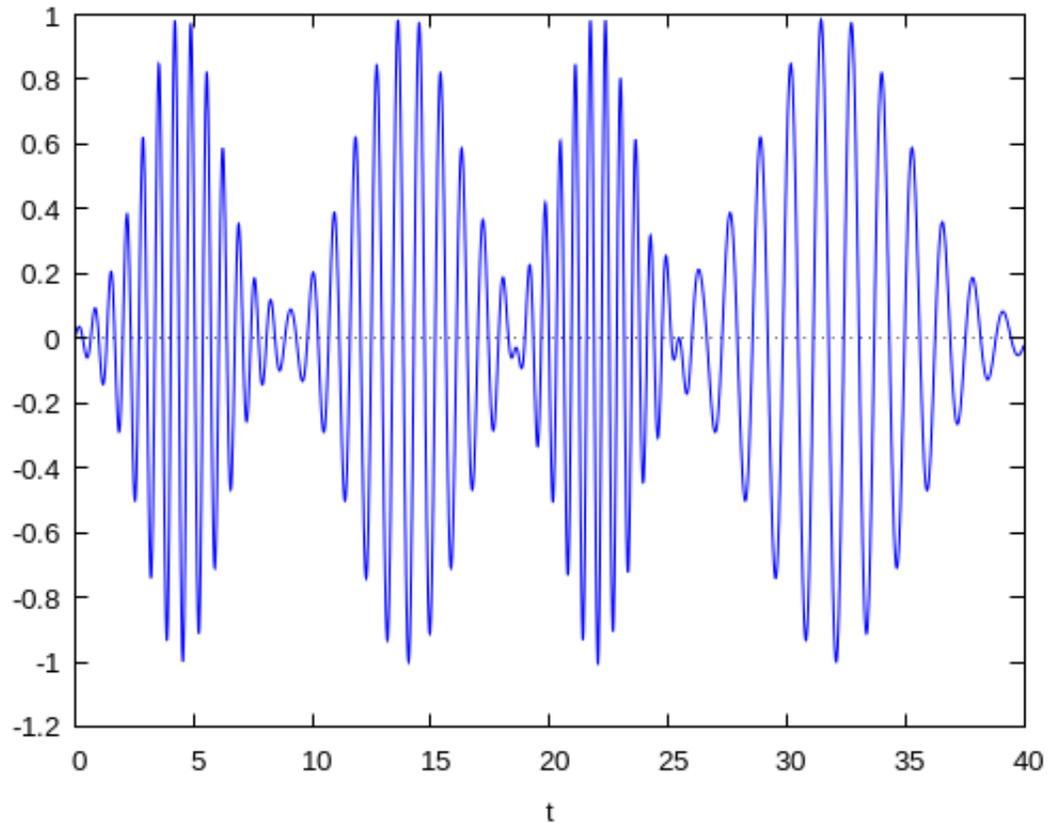


Figura 2: señal $x(t)$

El objetivo es determinar cuál es la ubicación del patrón $z(t)$, dentro de la señal $x(t)$.

Calculamos entonces la correlación cruzada entre ambas señales:

$$r(t) = x(t) \star z(t) = \int_0^{40} x(\tau) z(\tau - t) d\tau \quad (18)$$

La señal $r(t)$ es la correlación obtenida, y según se observa en el gráfico el pico de la correlación ocurre en $t = 14$, que es justamente la ubicación temporal del patrón dentro de la señal $x(t)$

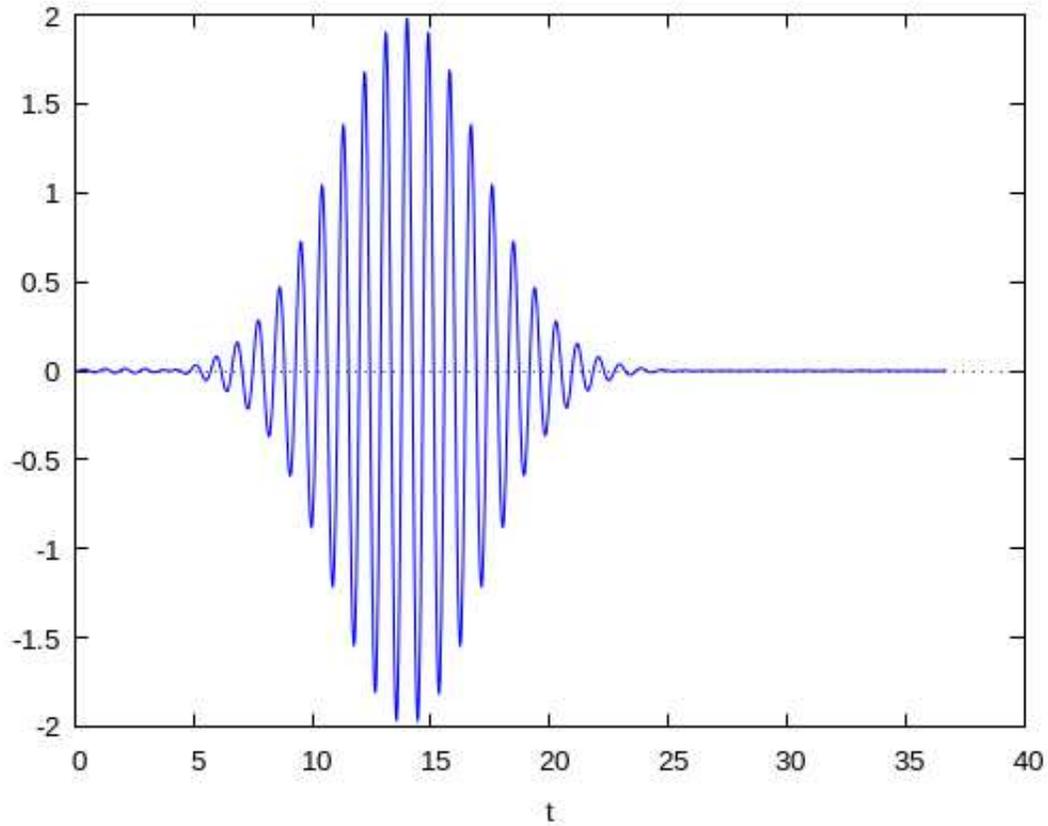


Figura 3: señal $r(t)$

3. Aplicación al caso de señales de tiempo discreto

Consideremos ahora $x[n]$ e $y[n]$, dos señales de tiempo discreto. En este caso, la variable n toma únicamente valores enteros.

En este contexto, el producto convolución entre $x[n]$ e $y[n]$, se define como:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] y[n - k] \quad (19)$$

De manera similar al caso continuo, definimos $z[n] = y[-n]$, entonces

$$x[n] * z[-n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z[k - n] \quad (20)$$

la ecuación

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z[k - n] = x[n] \star z[n] \quad (21)$$

es la definición de la correlación cruzada entre dos señales reales de tiempo discreto.

Por lo tanto:

$$x[n] * z[-n] = x[n] \star z[n] \quad (22)$$

Para una señal $x[n]$ de tiempo discreto, el espectro está definido como:

$$\mathcal{F}_d\{x[n]\} = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (23)$$

$X(\Omega)$ es la *Transformada de Fourier de tiempo discreto* de $x[n]$.

Al igual que en el continuo, es válido para tiempo discreto que el producto convolución entre señales temporales, se corresponde con el producto de sus respectivas transformadas:

$$\mathcal{F}_d\{x[n] * y[n]\} = X(\Omega) Y(\Omega) \quad (24)$$

y además $\mathcal{F}_d\{z[-n]\} = Z(-\Omega)$, entonces siendo $r[n]$ la correlación cruzada entre $x[n]$ y $z[n]$, y de acuerdo con las ecuaciones anteriores, considerando el caso en que $x[n] = z[n]$, resulta:

$$\mathcal{F}_d\{r[n]\} = R(\Omega) = X(\Omega) X(-\Omega) \quad (25)$$

$R(\Omega)$ es la *Transformada de Fourier de tiempo discreto* de $r[n]$.

Escribiendo $r[n]$ en función de su transformada inversa, se tiene que:

$$r[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} R(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (26)$$

Si tenemos en cuenta (análogo al caso continuo) que se trata de funciones reales, y la paridad de $R(\Omega)$, entonces

$$R(\Omega) = |X(\Omega)|^2 \quad (27)$$

así, la autocorrelación es:

$$r[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 e^{j\Omega n} d\Omega \quad (28)$$

implica

$$r[n] = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 \cos(\Omega n) d\Omega \quad (29)$$

Se puede ver que también para el caso discreto, $r[n]$ tiene su máximo valor para $n = 0$. Por lo tanto mediante la correlación cruzada de señales de tiempo discreto se puede establecer en qué momento hay similitud entre esas señales.

4. Detección de un patrón predeterminado en una grabación de audio

Se aplicarán las propiedades mencionadas, para determinar la ubicación de un determinado patrón, dentro de una grabación de audio dada mediante un archivo wav.

Se utilizará GNU Octave, que es un programa y lenguaje de programación adecuado para para realizar cálculos numéricos.

Un archivo wav es el resultado del muestreo de una señal de audio de tiempo continuo $x_c(t)$, a intervalos regulares con un período de muestreo T_s . De ese modo, resulta una señal de tiempo discreto $x[n] = x_c(nT_s)$.

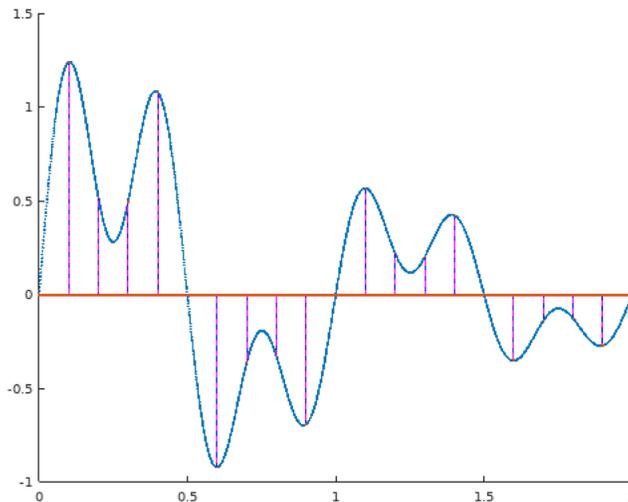


Figura 4: señal continua muestreada

Importamos el archivo con la señal $x[n]$ en el vector `xx`:
`[xx, fs, nbits] = wavread('/home/gpl/senialx.wav');`

y luego transponemos la matriz `xx`:
`xx=xx'`;

generamos un vector para el eje de tiempo: `tdurac=(m-1)/fs` `tt=0:1/fs:tdurac`;

Podemos visualizar el gráfico de la señal de audio `xx`:
`plot(tt,xx)`

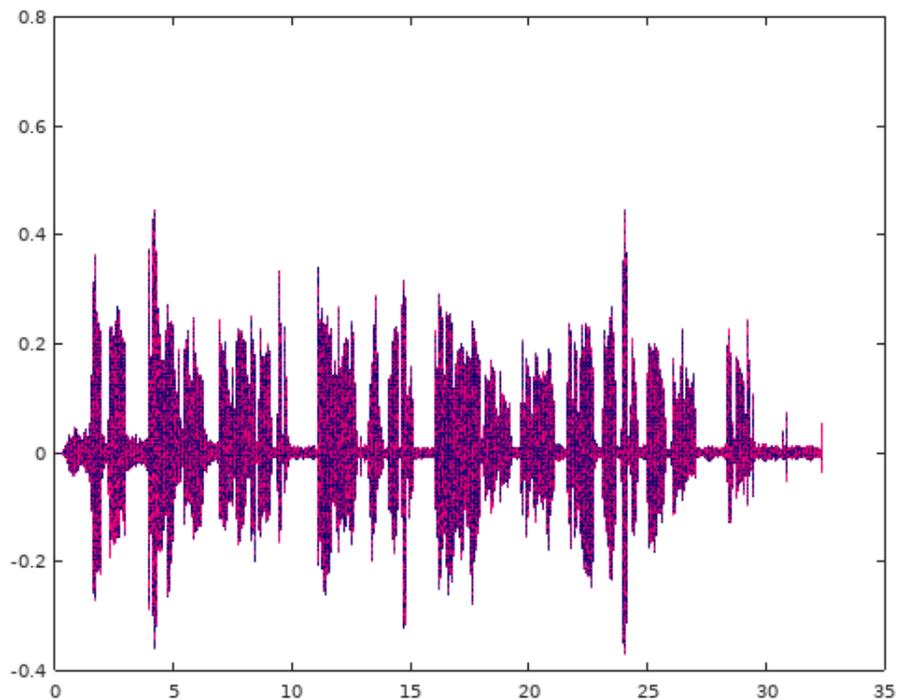


Figura 5: señal $x[n]$

De modo similar, importamos la señal patrón:
`[zz, fs, nbits] = wavread('/home/gpl/senialpatron.wav');`
`zz=zz'`;

Ambas señales fueron muestreadas a $f_s = 44100$ muestras por segundo y con 16 bits.

`plot(tt(1:length(zz)),zz)`

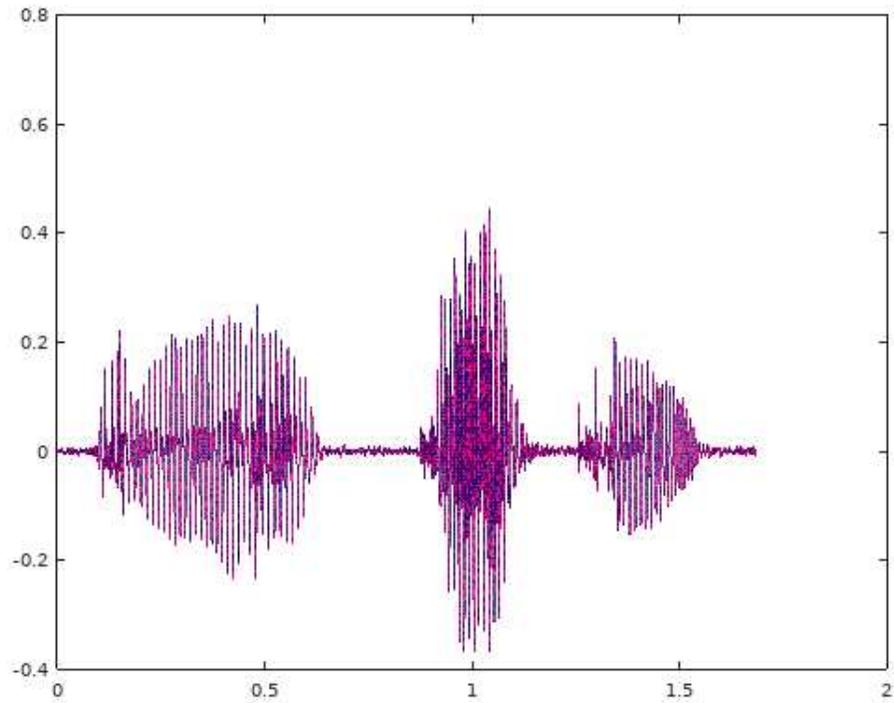


Figura 6: señal patrón $z[n]$

Efectuamos ahora la correlación entre ambas señales:

```
l=length(zz);  
m=length(xx);  
for k=1:m-l  
r(k)=xx(k:l+k-1)*zz';  
endfor
```

y observamos su gráfico:

```
plot(tt(1:length(r)),r)
```

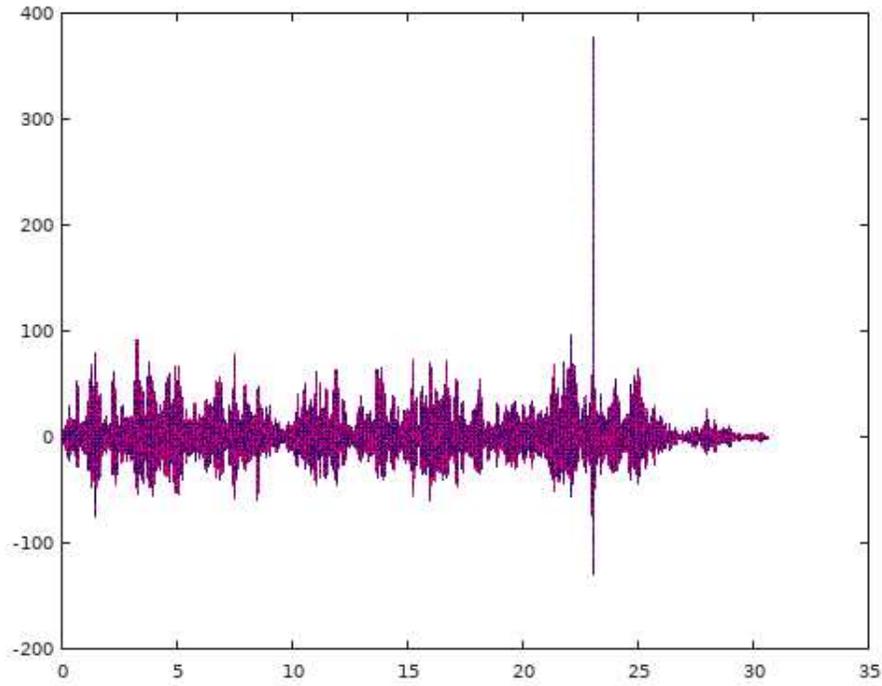


Figura 7: $r[n]$: correlación entre $x[n]$ y $z[n]$

se puede ver que hay un pico en donde la correlación toma un valor máximo.

Podemos ver con más detalle:

```
n1=22*fs
n2=25*fs
figure;plot(tt(n1:n2),r(n1:n2));
figure;plot(tt(n1:n2),r(n1:n2));
```

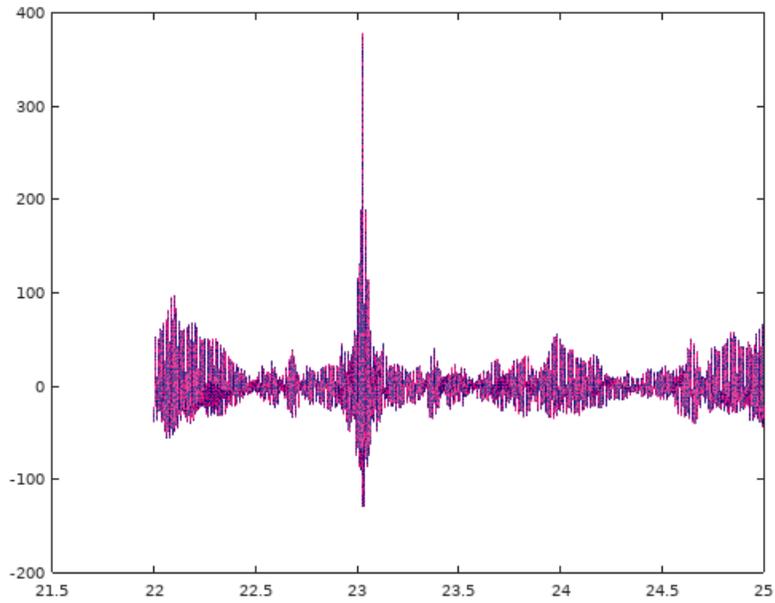


Figura 8: $r[n]$: correlación entre $x[n]$ y $z[n]$ (ampliación)

```
[valormax,posmax]=max(r);
nc=posmax
a=0.45;n1=round(nc-a*fs);n2=round(nc+a*fs);
plot(tt(n1:n2),r(n1:n2))
```

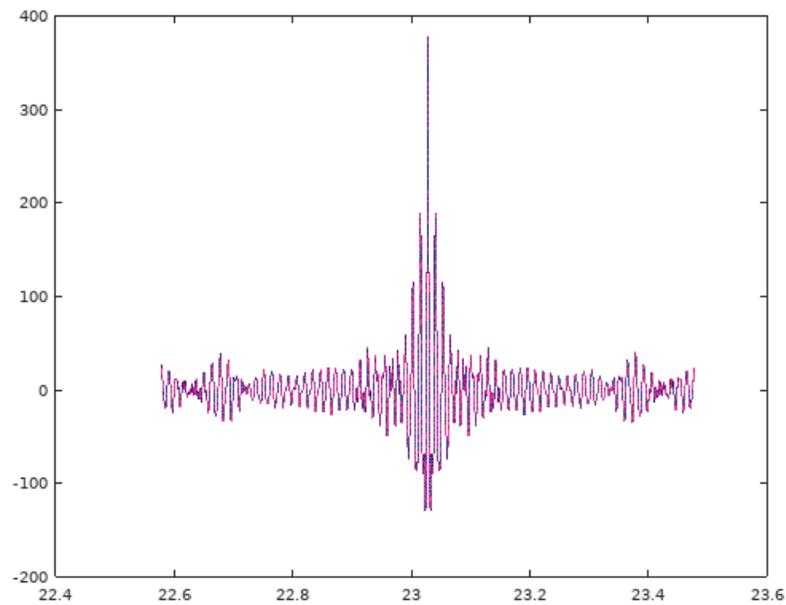


Figura 9: $r[n]$: correlación entre $x[n]$ y $z[n]$ (detalle)

valormax es igual a 377,47 y ocurre para la muestra $posmax = 1015537$, y corresponde al

momento $t = posmax/fs = 23,028$.

Se puede observar en el gráfico temporal de $x[n]$, con detalle en la zona donde se encuentra el patrón buscado:

```
aa=40000;n1=1015000-aa;n2=1095000+aa;plot(tt(n1:n2),xx(n1:n2))
```

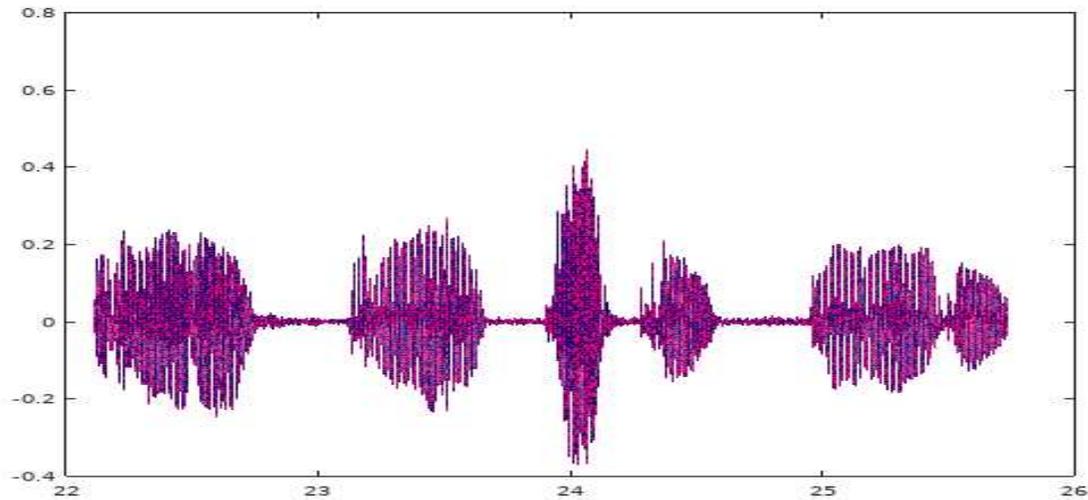


Figura 10: ubicación del patrón dentro de $x[n]$

También se podría obtener, de acuerdo con las ecuaciones planteadas anteriormente, la correlación mediante la transformada de Fourier.

Dado que vamos a procesar señales de tiempo discreto y duración finita, utilizaremos la FFT, y previamente - para evitar aliasing - completaremos con ceros ambas señales de modo que tengan una longitud igual a la suma de ambas longitudes menos uno.

```
xx0=[xx zeros(1,length(zz)-1)];  
zz0=[zz zeros(1,length(xx)-1)];
```

luego se calculan las FFT de cada una de las señales:

```
XX0=fft(xx0);  
ZZ0=fft(zz0);
```

y aplicamos a ZZ0 la inversión en la variable, para implementar la correlación mediante la convolución

```
ZZ0f=flip(ZZ0);
```

```
frec=0:fs/length(XX0):fs-fs/length(XX0);
```

Los espectros de ambas señales son:

```
plot(frec(1:round(length(xx0)/20)),abs(XX0(1:round(length(xx0)/20))))
```

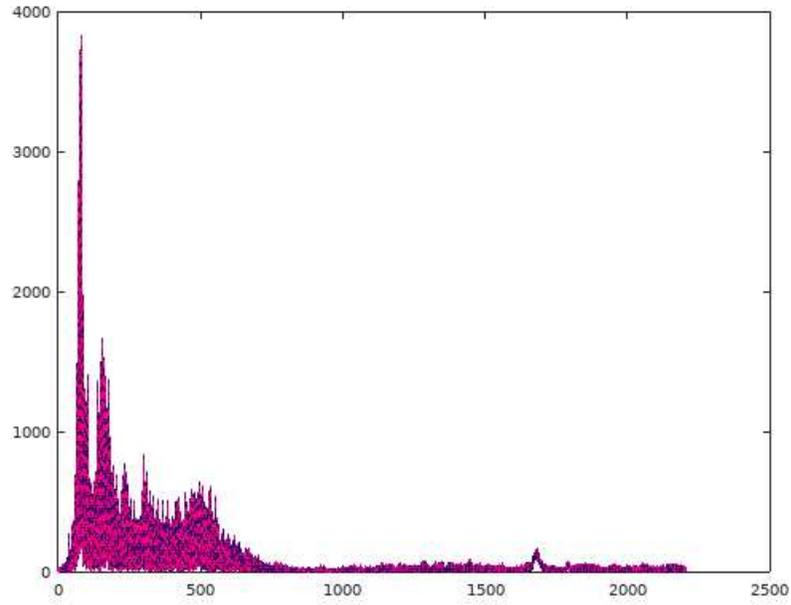


Figura 11: Espectro de $x[n]$

```
plot(frec(1:round(length(zz0)/20)),abs(ZZ0(1:round(length(zz0)/20))))
```

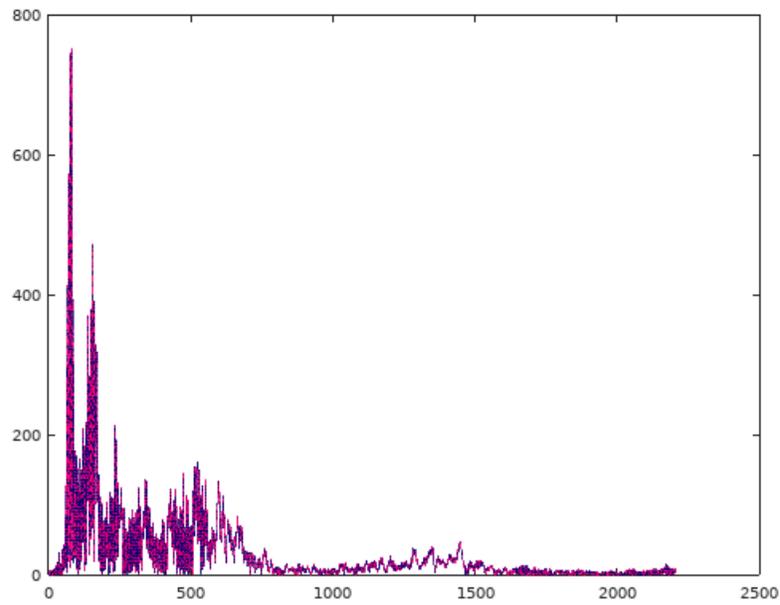


Figura 12: Espectro de $z[n]$

Calculamos ahora la transformada de la correlación entre las señales, mediante el producto de sus espectros:

```
RR=XX0.*ZZ0f;
```

y obtenemos la correlación aplicando la transformada inversa de Fourier discreta (IFFT):

```
rr=ifft(RR);
```

```
plot(real(rr))
```

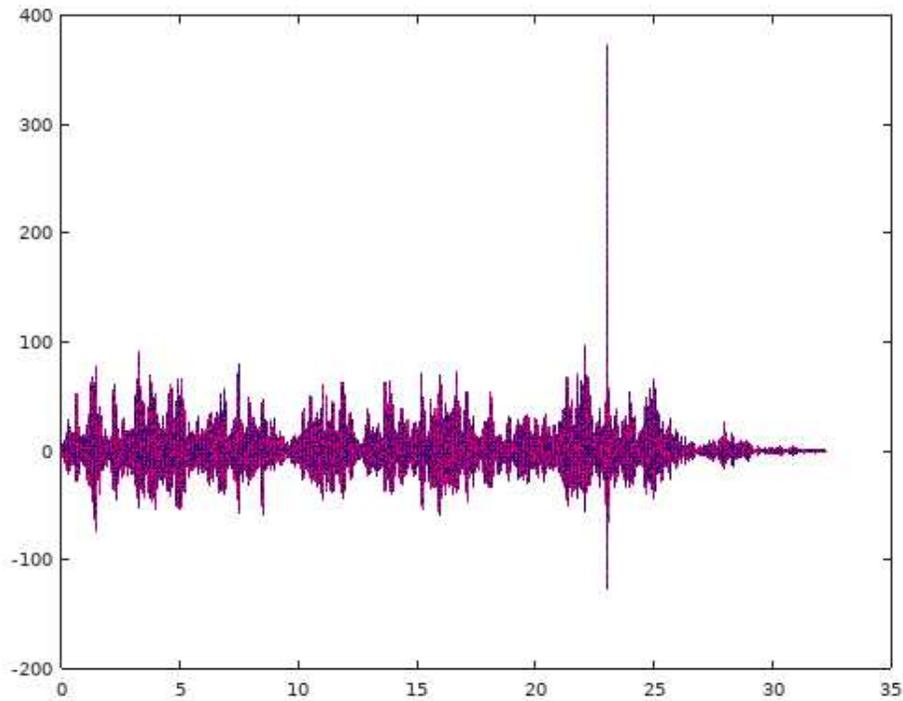


Figura 13: Correlación entre $x[n]$ y $z[n]$ utilizando FFT

Como podemos ver en la figura 13, el gráfico obtenido coincide con el gráfico de la correlación calculada en el dominio del tiempo, según se muestra en la figura 7.

4. Resultados y conclusiones

El máximo que se observa en la correlación cruzada ocurre en un tiempo igual al que habría que desplazar el patrón para que coincidiera con la señal. Esto es consistente con el desarrollo teórico realizado. También es consistente el resultado obtenido para el vector de correlación, calculado mediante la utilización de la transformada discreta de Fourier. El proceso de detección de un determinado patrón es muy eficiente y tiene una significativa tolerancia al ruido. Se deja planteada la alternativa de realizar ensayos que muestren cómo influye el nivel de ruido en la detección, y analizar las condiciones necesarias y suficientes en cuanto a dichos niveles de ruido y las longitudes temporales del patrón, que permitan garantizar la detección exitosa, o indicar cuál es el grado de probabilidad de que la detección ocurra.

5. Referencias

Brown, J. and Churchill, R. (2010). Variable compleja y aplicaciones. Madrid: MacGraw-Hill.

Lathi, B. (2010). Introducción a la teoría y sistemas de comunicación. México: Limusa.

Oppenheim, A. and Schafer, R. (1999). Discrete-time signal processing. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Oppenheim, A. Willsky, y A ,Nawab, S. (1997). Señales y Sistemas. 2a ed. México: Pretince Hall