UNIVERSIDAD DEL CEMA
Buenos Aires
Argentina

Serie
DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Finanzas

VALUACIÓN DE TÍTULOS DE DEUDA INDEXADOS AL COMPORTAMIENTO DE UN ÍNDICE ACCIONARIO: UN MODELO SIN RIESGO DE CRÉDITO

Marcelo F. Perillo

Abril 2021
Nro. 784

www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding <jae@cema.edu.ar>

Valuación de Títulos de Deuda Indexados al Comportamiento de un Índice Accionario: Un Modelo sin Riesgo de Crédito

Marcelo F. Perillo, PhD (*)

Universidad del CEMA, Argentina

Resumen

El objetivo del presente trabajo es abordar la valuación de una clase particular de productos estructurados, consistentes en títulos de deuda cupón cero cuya función de pagos está atada al comportamiento de otra variable, como podría ser un índice accionario. Su contribución consiste en la proposición de una fórmula o "*closed form solution*", bajo supuestos estándares en la valuación de instrumentos financieros derivados.

Keywords – Productos Estructurados, Valuación de Opciones, Modelo de Black, Merton y Scholes, Approach Probabilístico, Medida de Martingala Equivalente, Probabilidad Neutral al Riesgo.

(*) Las opiniones vertidas en este trabajo son personales del autor y no reflejan necesariamente los puntos de vista de la UCEMA. Comentarios bienvenidos a mperillo@ucema.edu.ar

Introducción

Durante la década de los 90 los mercados asistieron a la aparición y expansión de una clase especial de vehículos de inversión, conocidos comúnmente con el nombre de Productos Estructurados, en adelante PE. La definición de este tipo de productos resulta compleja, toda vez que bajo tal nombre genérico pueden encontrarse en la actualidad una amplia variedad de activos muy diferentes entre sí. En reconocimiento de ello, apelaremos a una caracterización general diciendo que un PE es el resultado de la combinación de diferentes activos, usualmente instrumentos del mercado spot e instrumentos financieros derivados.

La configuración de un activo de esta naturaleza es un trabajo de ingeniería financiera que permite, como dijimos mediante una combinación de activos, ofrecerles a los inversores productos que se adaptan a sus objetivos o necesidades de inversión y cuya construcción estaría, en general por su complejidad, fuera de su alcance.

Un tipo particular de producto estructurado, en su momento muy negociado en diversos mercados, que resultó muy afectado por la crisis del 2007-2008 en general y la de la banca de inversión en particular pero está resurgiendo, consiste en títulos de deuda cupón cero, cuya función de pagos está atada al comportamiento de una variable subyacente, comúnmente un índice accionario. El pago del título al vencimiento está dado en general por su Valor Nominal si el subyacente termina por debajo de un cierto valor, proveyendo al tenedor una protección contra un mercado bajista, y un pago ajustable por la rentabilidad del subyacente en caso contrario. En este caso de un mercado alcista, una gran variedad de configuraciones del producto resultan posibles y pueden encontrarse en el mercado, como por ejemplo que el tenedor obtenga el total, una proporción o múltiplo de la apreciación del subyacente durante el período de vida del título, también pueden incluir algún cap como el caso que utilizaremos para este trabajo, etc. En conclusión, el inversor tiene acceso, mediante este PE, a la inversión en el activo subyacente, riesgoso, con una protección frente a un mercado bajista.

Instrumentos como el descripto podrían resultar atractivos para inversores que, por su grado de aversión al riesgo, no calificaran para la inversión directa en el subyacente (usualmente renta variable), o que por diversas razones no pudieran exponerse al riesgo del subyacente y la pérdida de capital, ampliando de tal forma el universo de inversores, por ejemplo, de renta variable.

El objetivo del presente trabajo consiste en proponer una solución cerrada o "*closed form solution*" para la valuación de un tipo particular de PE, cuya extensión a diferentes estructuras que se encuentran en los mercados resultaría en general simple. El PE tomado como benchmark para el trabajo se trata de un instrumento real, emitido por un Banco de Inversión, cuya función de pagos está dada por:

- Valor Nominal si el subyacente termina por debajo de un cierto valor (límite inferior), que usualmente coincide con su valor al momento de la emisión.

- Valor Nominal más la rentabilidad del subyacente si este termina por encima del valor mínimo pero por debajo de cierto valor (límite superior).

- Valor Nominal más un interés establecido en las condiciones de emisión si al vencimiento del bono el subyacente se encontrara por encima del límite superior.

Las características de la función de pagos de tal instrumento, esto es su pago condicional o derivado del comportamiento de otro activo subyacente, inducen a abordar el problema de su valuación desde la teoría de valuación de derivados.

No obstante ello, una característica de estos instrumentos nos previene de una simple extensión del modelo estándar, usualmente aplicado en la valuación de opciones. Dicha característica es que los mismos son títulos de deuda que no cuentan en general con colateral ni garantías de cumplimento más que el proporcionado por la situación económica, financiera y patrimonial del inversor, situación que nos plantea la necesidad de contemplar especialmente la existencia de riesgo de crédito, esto es el riesgo de que el emisor, que en general suele ser un banco de inversión, no cumpla con las obligaciones derivadas del instrumento. La metodología estándar de valuación de instrumentos financieros derivados no contempla la existencia de riesgo de crédito, pudiéndose juzgar ello razonable para la valuación de productos que son negociados en un ámbito bursátil en el cual operan garantías y resguardos que no necesariamente se presentan en este caso. Su aplicación nos conduciría a una posible sobrevaluación de activos como los aquí analizados. Tal situación representaría, para el emisor, un incentivo para la financiación mediante estos instrumentos de deuda, en tanto que de tal forma podría evitar la prima de riesgo de crédito que les demanda el mercado de deuda estándar. Cabe esperar, de ser así, que tales imperfecciones no se sostendrían en el tiempo y que ambos mercados valorarían de la misma forma el riesgo de crédito del emisor. No obstante ello, la incorporación del riesgo de crédito será motivo de un trabajo ulterior, a publicarse en esta misma Serie.

En la sección a continuación emprendemos el objetivo propuesto, bajo supuestos estándar en la valuación de instrumentos financieros derivados, siguiendo el modelo propuesto por Black y Scholes (1973) y Merton (1973) [4], y apelando a la representación conocida como *Approach Probabilístico*, formalizada en los trabajos de Harrison y Kreps (1979) [2] y Harrison y Pliska (1981) [3].

Modelo: Derivación de la Fórmula o Solución Cerrada

En línea con lo que señalamos anteriormente, asumiremos:

a.- Mercados perfectos, sin fricciones (ausencia de impuestos, costos de transacción, restricciones para short sales, agentes tomadores de precios).
b.- La negociación de activos es continua.
c.- Mercados completos.
d.- Ausencia de oportunidades de arbitraje.
e.- La tasa de interés, r, es conocida y constante e igual para todos los vencimientos.
f.- El comportamiento del precio del subyacente, S, del instrumento satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica, bajo la medida de probabilidad "real", P, con μ y σ constantes:

$$dS(t) = (\mu - q)S(t)dt + \sigma S(t)dW^P(t) \tag{1}$$

donde:

μ: rentabilidad esperada del activo

q: tasa de dividendo o dividend yield

σ: desvío estándar de la rentabilidad del subyacente.

y W(t) representa un movimiento browniano estándar.

g.- Inexistencia de riesgo de crédito.

Bajo los supuestos planteados, puede demostrarse que existe una medida de martingala equivalente, esto es una medida de probabilidad Q, equivalente a la "verdadera" medida de probabilidad, P, tal que el precio descontado de los activos bajo Q es una martingala, y que tal medida es única, representando esto último que existirá un único precio para el activo consistente con la inexistencia de oportunidades de arbitraje. Cuando el numerario utilizado está determinado por el activo libre de riesgo, tal medida de probabilidad recibe el nombre de *Probabilidad Neutral al Riesgo*. Tales resultados, más formal y rigurosamente presentados en numerosos trabajos y textos avanzados de Finanzas, son usualmente presentados como *Primer y Segundo Teorema Fundamental de Finanzas*. Bajo esta medida de martingala equivalente, o medida de probabilidad neutral al riesgo, *Q*, el precio del subyacente satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = (r - q)S(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t) \qquad (2)$$

en tanto que el precio de un derivado, *f*, sobre dicho activo subyacente, *S*, cuyo payoff ocurre en T, debe satisfacer, en ausencia de oportunidades de arbitraje:

$$f(t)e^{-rt} = E^Q[e^{-rT} f(T)] \qquad (3)$$

$$f(t) = e^{-r(T-t)} E^Q[f(T)]$$

donde *f(T)* representa a la función de pagos del instrumento a su vencimiento, *f(t)* a su valor en *t*, momento presente, y *T-t* (τ) el plazo al vencimiento.

La función de pagos del instrumento utilizado para el presente trabajo presenta las siguientes características:

$$f(T) \begin{cases} VN \text{ si } S(T) \leq X_i \\ VN^*(S(T)/S(0)) \text{ si } X_i < S(T) \leq X_s \\ VNe^{iT} \text{ si } S(T) > X_s \end{cases} \qquad (4)$$

donde:

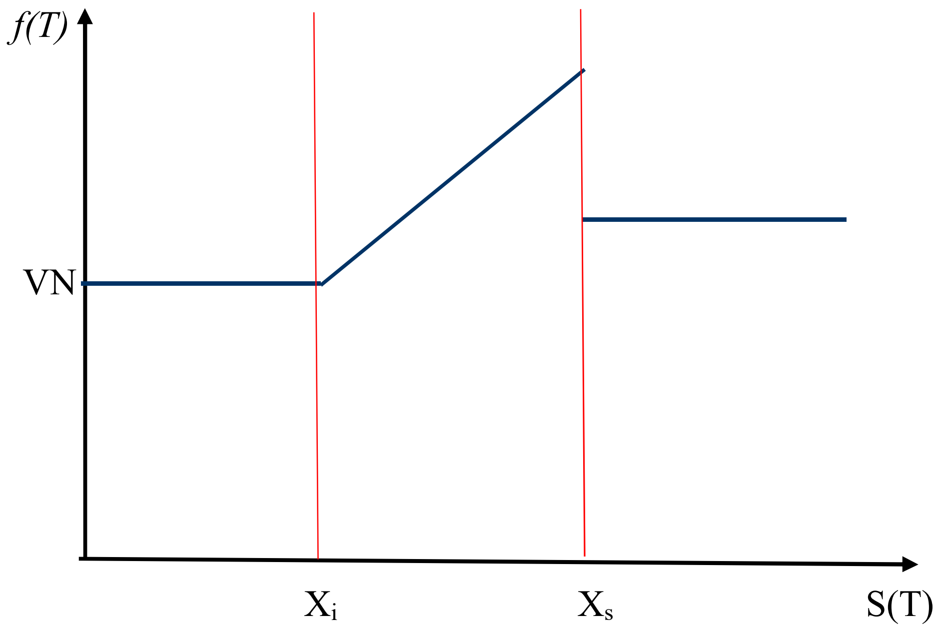
VN: Valor nominal sobre el cual se determinará el payoff.

$X_{i/s}$: límite inferior/superior para el valor del subyacente al vencimiento del título, establecido en las condiciones de emisión.

i: tasa de interés que paga el título al tenedor si al vencimiento el valor del subyacente termina por encima del límite superior.

Como puede observarse de la representación de la función de pagos, si al vencimiento del instrumento el precio del subyacente, S, se encontrara por debajo del límite inferior establecido el inversor percibiría el Valor Nominal. Para cualquier valor entre ambos límites percibirá el VN más la rentabilidad del subyacente, punta contra punta, en tanto que para valores del subyacente por encima del límite superior recibiría simplemente el VN capitalizado a una tasa de interés especificada en las condiciones de emisión.

A continuación proporcionamos una representación gráfica, a título meramente ilustrativo de las características centrales de la función de pagos del instrumento al vencimiento:



Incorporando (4) en (3), esto es apelando a los Teoremas mencionados, obtenemos la expresión que debería satisfacer el precio del instrumento en ausencia de oportunidades de arbitraje:

$$f(t) = e^{-r\tau} E^{Q}\left[VN\mathbf{1}_{S(T)\leq X_i} + VN\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\mathbf{1}_{X_i<S(T)\leq X_s} + VNe^{iT}\mathbf{1}_{S(T)>X_s}\right] \; (5)$$

donde por **1** estamos representando a la función indicador.

Aplicando las propiedades del operador valor esperado, podemos descomponer (5) en:

$$f(t) = f_1 + f_2 + f_3 \tag{6}$$

con:

$$f_1 = e^{-r\tau} E^Q\left[VN\mathbf{1}_{S(T)\leq X_i}\right] \tag{7}$$

$$f_2 = e^{-r\tau} E^Q\left[VN\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\mathbf{1}_{X_i<S(T)\leq X_s}\right] \tag{8}$$

$$f_3 = e^{-r\tau} E^Q\left[VNe^{iT}\mathbf{1}_{S(T)>X_s}\right] \tag{9}$$

Lo que sigue es la evaluación de (7), (8) y (9).

La evaluación de (7) resulta en:

$$f_1 = VNe^{-r\tau}N(d_1) \tag{10}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{X_i}{S(t)}\right)-\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

donde N(d) representa la función de distribución acumulada normal estándar.

Por su parte (8) nos conduce a:

$$f_2 = VN\frac{S(t)}{S(0)}e^{-q\tau}[N(d_2) - N(d_3)] \qquad (11)$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{X_s}{S(t)}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_3 = \frac{ln\left(\frac{X_i}{S(t)}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Finalmente, del análisis de (9) resulta:

$$f_3 = VNe^{iT - r\tau}N(d_4) \qquad (12)$$

$$d_4 = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{X_s}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -d_2 - \sigma\sqrt{\tau}$$

La expresión final para la valuación del instrumento bajo análisis es entonces la siguiente:

$$f(t) = VNe^{-r\tau}N(d_1) + VN\frac{S(t)}{S(0)}e^{-q\tau}[N(d_2) - N(d_3)] + VNe^{iT - r\tau}N(d_4) \qquad (13)$$

con:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{X_i}{S(t)}\right) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{X_s}{S(t)}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_3 = \frac{ln\left(\frac{X_i}{S(t)}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$d_4 = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{X_s}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -d_2 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Verificaciones estándar de (13) conducen a resultados consistentes con las condiciones de frontera y con lo que cabía intuitivamente esperar dada la función de pagos del instrumento. Analizaremos a continuación algunas de esas condiciones:

a) $S(t) \longrightarrow \infty$

En este caso puede comprobarse que d_1, d_2 y d_3 tienden $-\infty$ y por lo tanto se sigue que $N(d_1)$, $N(d_2)$ y $N(d_3)$ tienden a 0. Por su parte se verifica que $d_4 \rightarrow \infty$ y $N(d_4) \rightarrow 1$. El valor que arroja en este caso nuestra fórmula para el PE estará dado entonces por:

$$f(t) = e^{-r\tau}\left[VNe^{iT}\right]$$

resultado que era esperable, pues en tal caso el valor del subyacente terminaría por encima del límite superior y consecuentemente el instrumento pagaría en tal caso el VN capitalizado a la tasa de interés *i*. Consecuentemente, en ausencia de oportunidades de arbitraje el instrumento debería negociarse al valor presente de dicho flujo de fondos cierto, descontando a tal efecto el flujo de fondos a la tasa de interés libre de riesgo.

b) S(t) ⟶ 0

En este caso d_1, d_2 y d_3 tienden a $+\infty$ y por lo tanto se sigue que $N(d_1)$, $N(d_2)$ y $N(d_3)$ tienden a 1. Por su parte se verifica que $d_4 \longrightarrow -\infty$ y $N(d_4) \longrightarrow 0$. El valor que arroja nuestra fórmula para el PE estará dado entonces por:

$$f(t) = e^{-r\tau} VN$$

La explicación del resultado procede conforme a la proporcionada en el punto anterior. Con $S(t) \longrightarrow 0$ la probabilidad que este termine por debajo del límite inferior, y consecuentemente que al vencimiento el título pague el VN, tiende a 1. En tal caso el instrumento debería negociarse al valor presente del VN, descontado este a la tasa de interés libre de riesgo.

c) $\sigma \rightarrow 0$

La fórmula nos proporciona diferentes respuestas en esta situación, según la relación existente entre S(t), X_s y X_i, Ello puede explicarse por el comportamiento que exhibiría el subyacente bajo los supuestos del modelo y sin volatilidad.
Puede apreciarse que bajo la medida de probabilidad Q su precio crecería de forma determinística bajo la situación planteada a la tasa (r-q). En tal caso el pago del título dependería de la posición relativa del precio actual del subyacente con respecto a los valores de ambos límites. Más precisamente, la distancia entre el precio corriente del subyacente y los límites, conjuntamente con la tasa de crecimiento mencionada, pueden derivar en las diferentes situaciones que analizamos a continuación:

- $S(t)e^{(r-q)\tau} < X_i$

En este escenario se verifica que d_1, d_2 y d_3 tienden a $+\infty$ y por lo tanto se sigue que $N(d_1)$, $N(d_2)$ y $N(d_3)$ tienden a 1. Por su parte $d_4 \to -\infty$ y $N(d_4) \to 0$. La fórmula se reduce en tal caso a la siguiente expresión:

$$f(t) = e^{-r\tau} VN$$

Ello se explica en el hecho que, creciendo (o decreciendo según la relación entre r y q) de forma determinística, el precio del subyacente a la tasa $r - q$ no podrá alcanzar y superar el límite inferior al vencimiento del instrumento, consecuentemente este ofrecerá un pago igual a su VN.

- $X_i < S(t)e^{(r-q)\tau} \leq X_s$

En esta situación se verifica que d_1, d_3 y d_4 tienden a $-\infty$ y por lo tanto $N(d_1)$, $N(d_3)$ y $N(d_4)$ tienden a 0. Por su parte $d_2 \to +\infty$ y $N(d_2) \to 1$. La fórmula se reduce en tal caso a la siguiente expresión:

$$f(t) = e^{-r\tau} \left[VN \frac{S(t)e^{(r-q)\tau}}{S(0)} \right] = VN \left[\frac{S(t)e^{-q\tau}}{S(0)} \right]$$

El resultado es también aquí intuitivo, reconociendo que el valor del subyacente terminaría entre ambos límites y que en tal caso el tenedor recibiría el valor nominal capitalizado a la tasa de rentabilidad del subyacente. La primera expresión nos está indicando precisamente ello, el precio del instrumento debería ser igual al valor actual (descontado a la tasa de interés libre de riesgo) del valor nominal capitalizado a la tasa de rendimiento del activo entre el momento inicial, t=0, y su vencimiento en T, rendimiento representado por (r-q).

- $S(t)e^{(r-q)\tau} > X_s$

Notar que d_1, d_2 y d_3 tienden a $-\infty$ y por lo tanto se sigue que $N(d_1)$, $N(d_2)$ y $N(d_3)$ tienden a 0. Por su parte se verifica que $d_4 \rightarrow +\infty$ y $N(d_4) \rightarrow 1$. La fórmula se reduce en tal caso a la siguiente expresión:

$$f(t) = e^{-r\tau}\left[VNe^{iT}\right]$$

y su explicación procede como en los casos anteriores.

d) $\tau \longrightarrow 0$

En este último caso que analizaremos cabe formular similares consideraciones a las realizadas en el punto anterior. La respuesta del modelo será diferente según cuál haya sido el valor final del subyacente. Si se verificara que $S(T) < X_i$ la respuesta que obtenemos analizando el comportamiento de d_1, d_2, d_3, d_4, $N(d_1)$, $N(d_2)$, $N(d_3)$ y $N(d_4)$ es que el valor del instrumento estaría dado por su VN. Similar análisis para el escenario $X_i < S(T) < X_s$ nos conduce a la siguiente respuesta: $f(T)=VN(S(T)/S(0))$. Finalmente, de terminar el subyacente por encima del límite superior, $S(T) > X_s$ la fórmula arroja que $f(T)=VNe^{iT}$.

Del análisis formulado se concluye que la expresión obtenida satisface las condiciones de frontera que caracterizan la función de pagos del instrumento analizado, brindándonos respuestas coincidentes con las que podían anticiparse mediante un análisis meramente conceptual de dicha función.

Conclusiones y Líneas de Investigación Futuras

El propósito central del presente trabajo es proporcionar una solución cerrada para la valuación de una clase particular de productos estructurados, bajo los supuestos estándar de la teoría de valuación de opciones. Para tal fin apelamos al approach probabilístico, predominante hoy día en la literatura y en la industria, concluyendo en una expresión que satisface los supuestos planteados.

Numerosas líneas de investigación resultan imaginables, simplemente levantando alguno (o algunos) de los supuestos formulados. En un ulterior trabajo abordamos el problema, con el mismo objetivo de arribar a una solución cerrada, incorporándole al modelo propuesto la existencia de riesgo de crédito, y apelando para ello a lo que se conoce como *Approach Estructural*.

Referencias

[1] Black, F., Scholes, M., (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

[2] Harrison, J. M., Kreps, D. M., (1979), Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory,* 20, 381-408.

[3] Harrison, J. M., Pliska, S. R., (1981), Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 215-260.

[4] Merton, R. C., (1973), The theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science,* 4, 141-183.