Series Cronológicas

Emilio Picasso

Introducción

Series Cronológicas
Definición

Población $\tilde{x}$ $\leftrightarrow$ Proceso estocástico $\tilde{z}(t)$

Muestra $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n$ $\leftrightarrow$ Serie cronológica $\tilde{z}_t$ (equiespaciada)

- t: tiempo, espacio, variable que induce un orden.

Series Cronológicas
Momentos

$$\mu(t) = \mathfrak{E}\tilde{z}(t)$$

$$\sigma_z^2(t) = \gamma_0 = \mathfrak{E}(\tilde{z} - \mu)^2$$

$$\gamma_k = \mathscr{V}(\tilde{z}(t); \tilde{z}(t+k))$$ autocovarianza de rezago k

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$ autocorrelación de rezago k

Observación: $\gamma_{-k} = \gamma_k$

Series Cronológicas
Estacionariedad

- Proceso estacionario (estricto):

$$\tilde{z}(t) \text{ estacionario} \Leftrightarrow \forall m, t_1, t_2 \ldots t_m : \quad f(z_{t_1}, z_{t_2}, \ldots, z_{t_m}) = f(z_{t_1+h}, z_{t_2+h}, \ldots, z_{t_m+h})$$

  - Un proceso estacionario tiene la función de densidad de probabilidad constante, por lo tanto todos sus momentos son constantes.

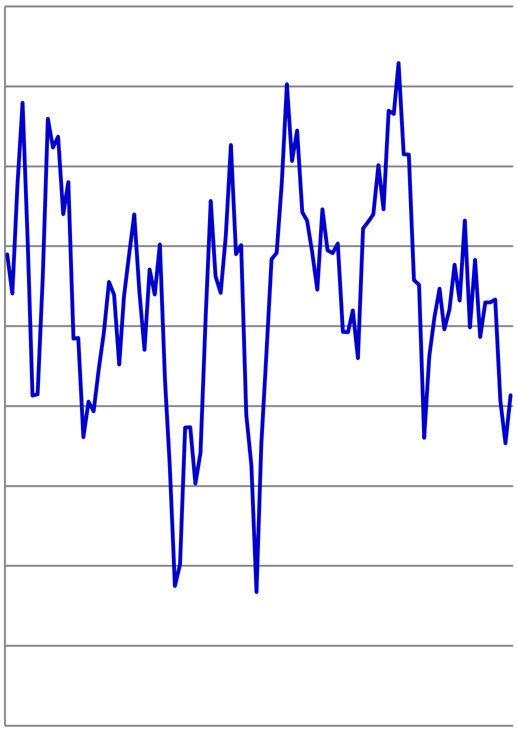
- Proceso débilmente estacionario:

$\tilde{z}(t)$ estacionario de orden $m \Leftrightarrow$ Sus momentos hasta el orden m son constantes

  - El caso más importante es para m=2: $\mu = cte \qquad \gamma_k = cte$
  - La estacionariedad estricta es difícil de determinar.
  - Si $\tilde{z} : \mathcal{N}$ coinciden las definiciones de estacionariedad estricta y débil.

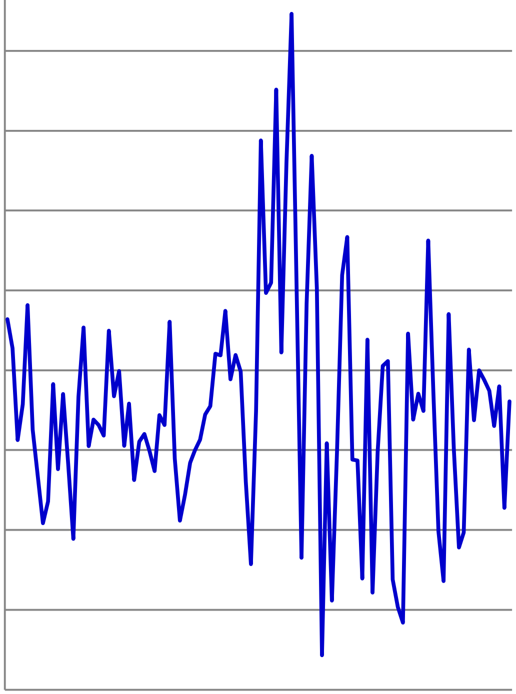
Series Cronológicas
Estacionariedad

Cantidad diaria de autos defectuosos



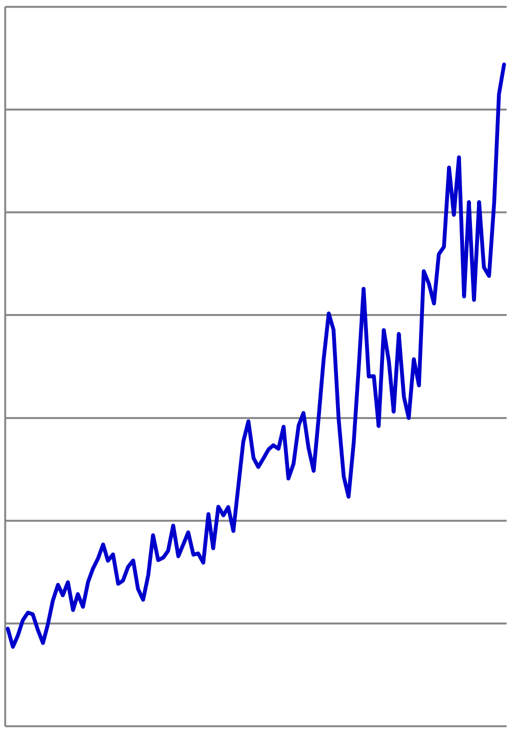
Estacionaria en μ y σ^2

Rendimiento diario Merval



Estacionaria en μ pero no en σ^2

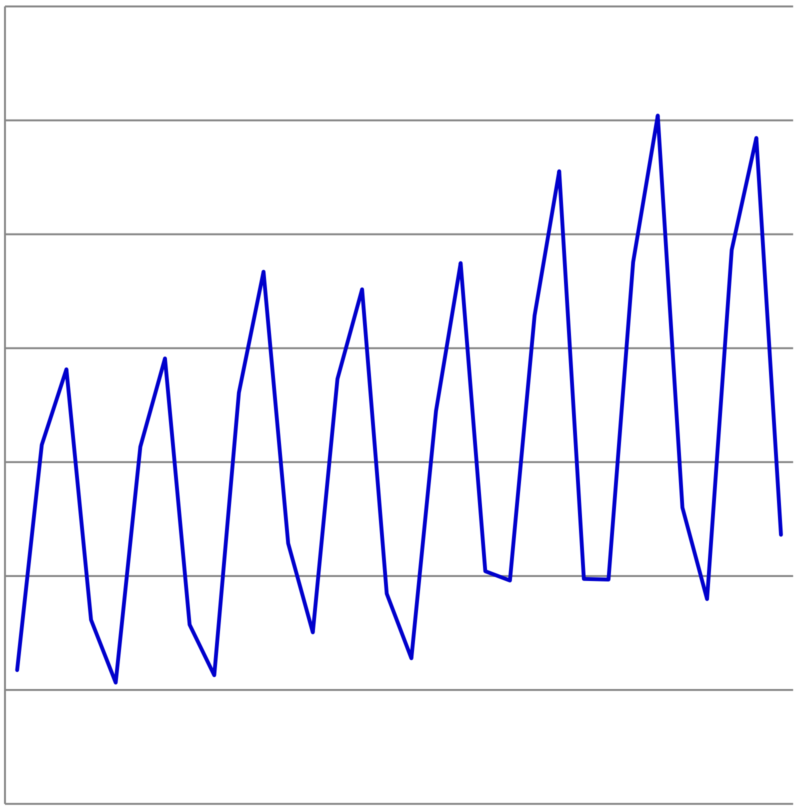
Demanda anual de Tabaco



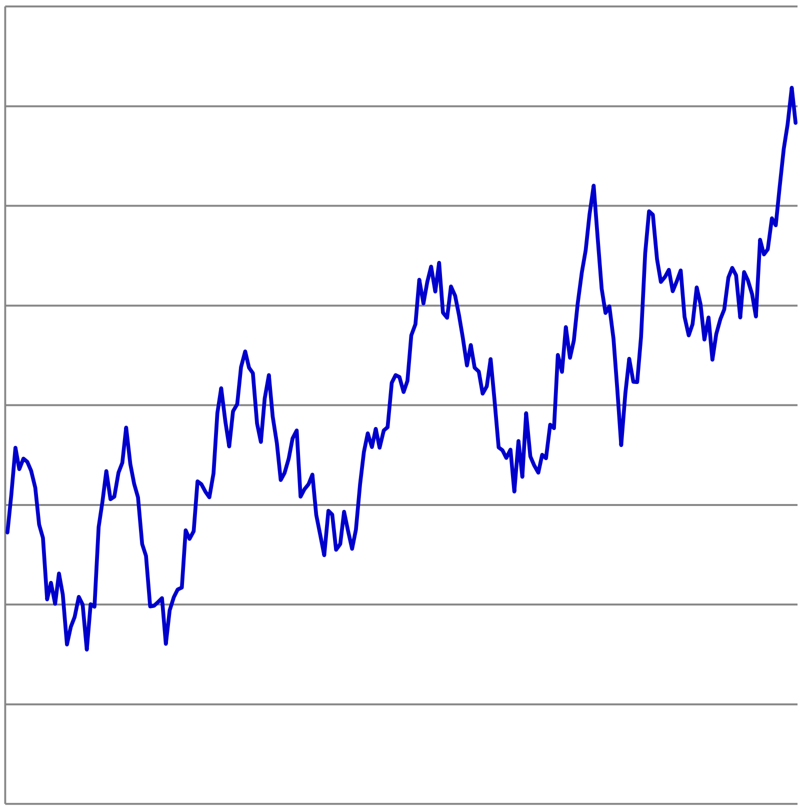
No estacionaria

Series Cronológicas
Estacionalidad y Ciclo

Demanda trimestral de cerveza

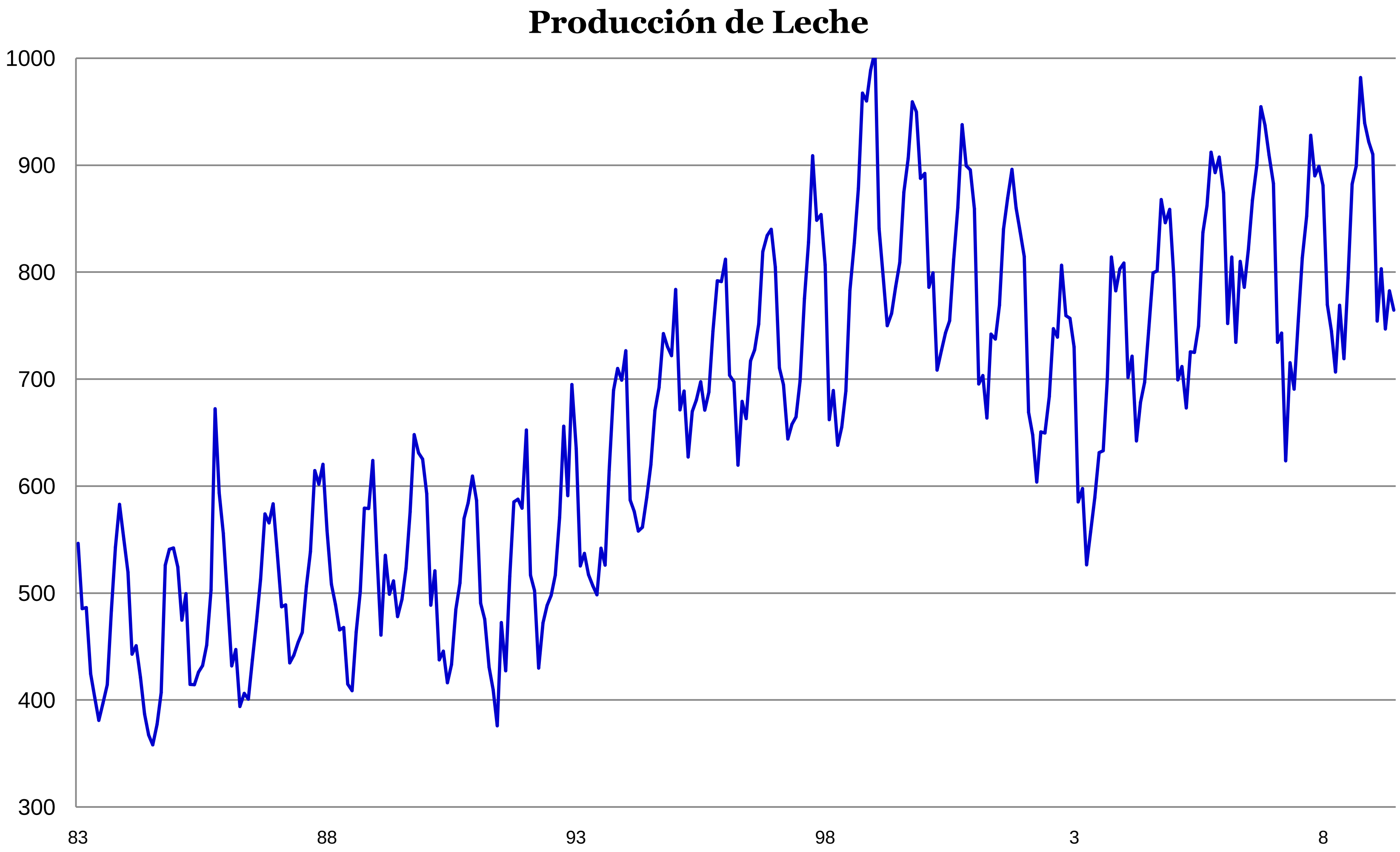


Precio mensual del polipropileno



Emilio Picasso

Series Cronológicas



Series Cronológicas
Momentos Empíricos

- Dada la serie (muestra): $z_1, z_2, \ldots z_T$

$$\hat{\mu} = \overline{z} = \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t$$

$$\hat{\sigma}_z^2 = \hat{\gamma}_0 = c_0 = \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (z_t - \overline{z})^2$$

$$\hat{\gamma}_k = c_k = \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k} (z_t - \overline{z})(z_{t+k} - \overline{z})$$

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$$

- Son necesarias muestras grandes porque la autocorrelación puede “retener” al proceso en una zona durante cierto tiempo.

Modelo de Filtro Lineal

Series Cronológicas
Notación de Operadores

- Definición:

$$\text{Retroceso: } Bz_t = z_{t-1}$$

$$\text{Avance: } Fz_t = z_{t+1}$$

$$\text{Diferencia: } \nabla z_t = z_t - z_{t-1}$$

$$\text{Suma: } Sz_t = \nabla^{-1} z_t$$

- Propiedades:

$$B^m z_t = z_{t-m} \qquad F = B^{-1} \qquad \nabla = 1 - B$$

$$Sz_t = (1-B)^{-1} z_t = (1 + B + B^2 + \ldots) z_t = \sum_{j=0}^{\infty} z_{t-j}$$

» Estos operadores son lineales y forman un álgebra <u>conmutativa</u> con las operaciones suma y composición.

Series Cronológicas
Modelo de Filtro Lineal

$$a_t \longrightarrow \underset{\mu}{\overset{\psi}{\boxed{\text{Filtro Lineal}}}} \longrightarrow z_t$$

a_t : ruido blanco o innovación: VA indep. con: $\mathscr{E}a_t = 0 \quad \mathscr{V}a_t = \sigma^2$

$$z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \ldots$$

$$\boxed{z_t = \mu + \psi(B) a_t}$$

con: $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots$ función de transferencia

Series Cronológicas
Modelo de Filtro Lineal – Forma Autoregresiva

- Asumiendo que la serie está centrada (sin pérdida de generalidad):

$z_t = \psi(B) a_t$ forma de media móvil $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots$

$\pi(B) z_t = a_t$ forma autorregresiva $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \ldots$

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B) \quad \Rightarrow \quad \psi(B)\pi(B) = 1$$

	1	$-\pi_1 B$	$-\pi_2 B^2$	$-\pi_3 B^3$
1	1	$-\pi_1 B$	$-\pi_2 B^2$	$-\pi_3 B^3$
$\psi_1 B$	$\psi_1 B$	$-\psi_1 \pi_1 B^2$	$-\psi_1 \pi_2 B^3$	$-\psi_1 \pi_3 B^4$
$\psi_2 B^2$	$\psi_2 B^2$	$-\psi_2 \pi_1 B^3$	$-\psi_2 \pi_2 B^4$	$-\psi_2 \pi_3 B^5$
$\psi_3 B^3$	$\psi_3 B^3$	$-\psi_3 \pi_1 B^4$	$-\psi_3 \pi_2 B^5$	$-\psi_3 \pi_3 B^6$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 - \pi_1 = 0 \\ \psi_2 - \psi_1 \pi_1 - \pi_2 = 0 \\ \psi_3 - \psi_2 \pi_1 - \psi_1 \pi_2 - \pi_3 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\boxed{\pi_j = \psi_j - \sum_{i=1}^{j-1} \psi_{j-i} \pi_i \qquad \psi_j = \pi_j + \sum_{i=1}^{j-1} \psi_i \pi_{j-i}}$$

Permiten el cálculo recurrente

Modelos Estacionarios
ARMA(p,q)

Modelos de Media Móvil $MA(q)$

- Definición:

$$z_t = \theta(B)a_t \qquad\qquad z_t : \text{ centrada}$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 \ldots - \theta_q B^q$$

- Estacionariedad:
  - » Como $\psi(B) = \theta(B)$ es finito siempre converge. Luego son siempre estacionarios.

- Invertibilidad:
  - » Expresando el modelo en su forma auto-regresiva $\pi(B)z_t = a_t$ a veces los coeficientes π_j aumentan con el rezago. Esto no tiene sentido práctico, y se dice que el modelo no es invertible.

$$z_t = \theta(B)a_t \quad \text{invertible} \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{C} / \theta(B) = 0 : \quad |B| > 1$$

Modelos de Media Móvil $MA(q)$
Momentos

- Varianza:

$$\gamma_0 = \mathcal{E} z_t^2 = \mathcal{E}(\theta(B)a_t)^2$$

  - Todos los términos cruzados tienen $\mathcal{E} a_t a_s = 0$ entonces:

$$\boxed{\gamma_0 = (1+\theta_1^2+\theta_2^2 \ldots + \theta_q^2)\sigma^2}$$

- Auto-covarianzas:

$$\gamma_k = \gamma_{-k} = \mathcal{E} z_t z_{t-k} = \mathcal{E}[\theta(B)a_t \theta(B)a_{t-k}]$$

$$\boxed{\gamma_k = (-\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \theta_{k+2}\theta_2 \ldots + \theta_q \theta_{q-k})\sigma^2}$$

$$\boxed{\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}}$$

- Estas ecuaciones permiten estimar σ^2 y θ_j, pero esta estimación por momentos no es buena.

Modelos Auto-Regresivos $AR(p)$

- Definición:

$$\phi(B) z_t = a_t \qquad z_t : \text{ centrada}$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \ldots - \phi_p B^p$$

- Estacionariedad:

$$\phi(B) z_t = a_t \quad \text{estacionario} \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{C} / \phi(B) = 0 : \quad |B| > 1$$

- Invertibilidad:
  - Como $\pi(B) = \phi(B)$ es finito siempre converge. Luego son siempre invertibles.
  - Si bien los coeficientes pueden crecer con el rezago, esto no continúa indefinidamente pues $\pi_j = 0$ para $j > p$.

Modelos Auto-Regresivos $AR(p)$ Momentos

- Varianza:

$$\gamma_0 = \mathcal{E} z_t^2 = \mathcal{E}[z_t(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} \ldots + \phi_p z_{t-p} + a_t)]$$
$$= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 \ldots + \phi_p \gamma_p + \mathcal{E}[z_t a_t]$$

  - Pero $\mathcal{E}[z_t a_s] = \mathcal{E}[(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} \ldots + \phi_p z_{t-p} + a_t) a_t] = \sigma^2$
  - Porque z_{t-j} con $j \geq 1$ son independientes de a_t, entonces:

$$\boxed{\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 \ldots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2}$$

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 \ldots - \phi_p \rho_p}}$$

Modelos Auto-Regresivos $AR(p)$
Momentos

- Auto-covarianzas:

$$\gamma_k = \mathcal{E} z_t z_{t+k} = \mathcal{E}[z_t(\phi_1 z_{t+k-1} + \phi_2 z_{t+k-2} \dots + \phi_p z_{t+k-p} + a_{t+k})]$$
$$= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \dots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

  » Pues a_{t+k} indep de z_t si $k > 1$

$$\boxed{\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \dots + \phi_p \gamma_{k-p}}$$
$$\boxed{\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \dots + \phi_p \rho_{k-p}}$$

Ecuaciones de Yule-Walker

- Estas ecuaciones permiten estimar σ^2 y ϕ_j, aunque las estimaciones por máxima verosimilitud o cuadrados mínimos son mejores.

Modelos *ARMA*(*p*,*q*)

- Definición:

$$\phi(B)z_t = \theta(B)a_t \qquad\qquad z_t : \ \text{centrada}$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \ldots\ldots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 \ldots - \theta_q B^q$$

- Estacionariedad:
  - » Un modelo ARMA es estacionario cuando su parte AR lo es.

$$\phi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad \text{estacionario} \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{C} / \phi(B) = 0 : \quad |B| > 1$$

- Invertibilidad:
  - » Un modelo ARMA es invertible cuando su parte MA lo es.

$$\phi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad \text{invertible} \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{C} / \theta(B) = 0 : \quad |B| > 1$$

Modelos $ARMA(p,q)$
Inversión

- Reemplazando z_t por $\sum_0^{\infty}\psi_j a_{t-j}$ en vertical:

$$
\begin{aligned}
&z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} \ldots\ldots\ldots - \phi_p z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \ldots\ldots\ldots - \theta_q a_{t-q} \\
&\psi_0 a_t = a_t \\
&\psi_1 a_{t-1} - \phi_1 \psi_0 a_{t-1} = -\theta_1 a_{t-1} \\
&\psi_2 a_{t-2} - \phi_1 \psi_1 a_{t-2} - \phi_2 \psi_0 a_{t-2} = -\theta_2 a_{t-2} \\
&\psi_3 a_{t-3} - \phi_1 \psi_2 a_{t-3} - \phi_2 \psi_1 a_{t-3} = -\theta_3 a_{t-3} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Entonces: $\psi_j = \sum_{i=1}^{\infty}\phi_i \psi_{j-i} - \theta_j$

  » Que permite el cálculo recurrente de ψ_j pues las ϕ_j, θ_j se anulan para $i>p$ y $j>q$

  .

Modelos $ARMA(p,q)$
Selección del Modelo

- Los procesos $MA(q)$ se detectan por la función de auto-correlación ya que:

$$\forall k > q: \quad \rho_k = 0$$

- Se demuestra que:

$$\forall k > q: \quad r_k : \mathscr{N}(0; \tfrac{1}{T}(1 + 2\sum_{j=1}^{q} \rho_j^2))$$

  - Que permite ensayar $H_0)\rho_k = 0$ y determinar q.
  - Hay que considerar la reducción de α por ensayos simultáneos: $\alpha' = 1 - (1-\alpha)^r$

Modelos $ARMA(p,q)$
Selección del Modelo

- Los procesos $AR(p)$ se detectan por la función de auto-correlación parcial.
- Las ecuaciones de Yule-Walker permiten estimar los ϕ_j

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \ldots + \phi_p \rho_{k-p}$$

- El coeficiente ϕ_p es la correlación entre z_t y z_{t-p} después de eliminar el efecto de z_{t-1} , z_{t-2} ,... z_{t-p+1} sobre z_t :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} \ldots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

- Entonces se lo llama auto-correlación parcial de orden p: ϕ_{pp}
- Para cada k se puede estimar ϕ_{kk} por Yule-Walker. Si se encuentra un $\phi_{kk} = 0$ entonces el proceso es $AR(p)$ con $p=k-1$.

Modelos $ARMA(p,q)$
Selección del Modelo

- Se demuestra que en un $AR(p)$:

$$\forall k > p: \quad \hat{\phi}_{kk} : \mathcal{N}(0; \tfrac{1}{T})$$

  - Que permite ensayar $H_0) \phi_{kk} = 0$ y determinar p.
  - Hay que considerar la reducción de α por ensayos simultáneos: $\alpha' = 1-(1-\alpha)^r$

- Los modelos ARMA(p,q) sólo pueden validarse después de ser estimados.

Procesos No Estacionarios ARIMA(p,d,q)

Emilio Picasso

Procesos No Estacionarios

- Se puede modelar a tendencia μ en función del tiempo y otras variables (lineal, exponencial, etc.) y los residuos estacionarios por ARMA. O hacerlo simultáneamente: ARMAX (no lineales).
- Pero a veces el proceso pasa largas temporadas sobre o bajo la media.

$$\phi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad \text{estacionario} \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{C} \,/\, \phi(B) = 0: \quad |B| > 1$$

- Si alguna $|B| < 1$ el proceso diverge inexorablemente y pierde interés como proceso estocástico. Ej: crecimiento bacteriano ad-libitum.
- Si alguna $|B| = 1$ el proceso no es estacionario pero no diverge: es homogéneo. Cuando B es compleja o $B = -1$ el proceso toma formas regulares artificiales. Entonces el caso de interés práctico es $B = 1$.

Procesos No Estacionarios

- Si hay d raíces unitarias $B = 1$:

$$\phi'(B) = \phi(B)(1 - B)^d = \phi(B)\nabla^d$$

- Que es un modelo $ARIMA(p,d,q)$

$$\boxed{\phi(B)\nabla^d z_t = \theta(B)a_t}$$

  » Donde la serie $\nabla^d z_t$ es estacionaria.

- Se llama "integrado" porque

$$\nabla^d z_t = w_t \quad \Rightarrow \quad z_t = S^d w_t$$

  » Donde la serie w_t es estacionaria.

Procesos No Estacionarios

- En la práctica d = 1 o 2, y los modelos más comunes son:

$$IMA(1,1): \qquad \nabla z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$IMA(2,2): \qquad \nabla^2 z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

- Los procesos integrados pueden ser difíciles de distinguir:

$$ARMA(1,1): \qquad z_t = \phi z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

$$IMA(1,1): \qquad z_t = z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

  - Si $\phi \cong 1$ son muy parecidos, aunque sus comportamientos futuros pueden ser bien diferentes.

Procesos No Estacionarios

- Un correlograma largo es señal de un proceso no estacionario. Las series diferenciadas deben mostrar correlogramas cortos.

- Ejemplos de procesos no estacionarios:
  - Precio de activos financieros.
  - Ventas de algunos productos.

Pronóstico

Pronóstico

- Dada la serie z_t (centrada) observada en el instante t:

  $\hat{z}_t(l)$: pronóstico para el instante $t+l$ con datos hasta el instante t (l : lead time)

  z_{t+l} : valor futuro de la serie en el instante $t+l$, aleatorio.

- Expresando la serie según el modelo de filtro lineal:

$$z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \ldots + \psi_j a_{t-j} + \ldots$$

- Se define el pronóstico como: $\boxed{\hat{z}_t(l) = \mathcal{E}_t z_{t+l}}$
  - Donde $\mathcal{E}_t$: esperanza en el instante t .

- Ahora: $\begin{cases} \forall j \le t: \quad a_j \text{ conocido (no observado)} \Rightarrow \mathcal{E}_t a_j = a_j \quad \mathcal{V}_t a_j = 0 \\ \forall j > t: \quad a_j \text{ aleatorio} \Rightarrow \mathcal{E}_t a_j = 0 \quad \mathcal{V}_t a_j = \sigma^2 \end{cases}$

- Entonces: $\hat{z}_t(l) = \mathcal{E}_t z_{t+l} = \mathcal{E}_t[a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \psi_2 a_{t+l-2} + \ldots + \psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \ldots]$

$$\boxed{\hat{z}_t(l) = \psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \ldots}$$

Pronóstico

- El error de pronóstico es:

$$\mathcal{E} = z_{t+l} - \hat{z}_t(l) = a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \psi_2 a_{t+l-2} + \ldots + \psi_{l-1} a_{t+1} + \ldots$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_t \mathcal{E} = 0$$

$\Rightarrow$ El error mínimo cuadrático concide con la varianza y es mínimo

$$\mathcal{V}_t z_{t+l} = \mathcal{V}[a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \psi_2 a_{t+l-2} + \ldots + \psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \ldots]$$

$$\boxed{\mathcal{V}_t z_{t+l} = (1 + \psi_1^2 + \ldots + \psi_{l-1}^2)\sigma^2}$$

Que permite hacer el intervalo de pronóstico

Pronóstico

- Naturaleza de los impulsos aleatorios:

$$
\begin{aligned}
&z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + + \psi_2 a_{t-2} + \ldots \\
&\hat{z}_t(1) = \psi_1 a_t + + \psi_2 a_{t-1} + \ldots \\
&\hat{z}_{t-1}(1) = \psi_1 a_{t-1} + + \psi_2 a_{t-2} + \ldots \\
&\Rightarrow \quad z_t - \hat{z}_{t-1}(1) = a_t
\end{aligned}
$$

  - » El impulso aleatorio es el error de pronóstico con lead time = 1

Pronóstico a partir de un Modelo *ARIMA*

- Todo modelo *ARIMA*(p,d,q) puede expresarse como una modelo *ARMA*(p+d,q). Entonces, sin pérdida de generalidad analizaremos un modelo *ARMA*.
- Por ejemplo para el *ARMA*(3,2):

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} - \phi_3 z_{t-3} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

$$z_{t+l} = \phi_1 z_{t+l-1} - \phi_2 z_{t+l-2} - \phi_3 z_{t+l-3} + a_{t+l} - \theta_1 a_{t+l-1} - \theta_2 a_{t+l-2}$$

$$\hat{z}_t(l) = \mathfrak{E}_t z_{t+l} = \phi_1 \mathfrak{E}_t z_{t+l-1} + \phi_2 \mathfrak{E}_t z_{t+l-2} + \phi_3 \mathfrak{E}_t z_{t+l-3} + \mathfrak{E}_t a_{t+l} - \theta_1 \mathfrak{E}_t a_{t+l-1} - \theta_2 \mathfrak{E}_t a_{t+l-2}$$

- Ahora:

$$\forall j \le t : \begin{cases} \mathfrak{E}_t z_j = z_j \\ \mathfrak{E}_t a_j = z_j - \hat{z}_{j-1}(1) \end{cases} \qquad \forall j > t : \begin{cases} \mathfrak{E}_t z_j = \hat{z}_t(j-t) \\ \mathfrak{E}_t a_j = 0 \end{cases}$$

- Entonces:

$$\hat{z}_t(1) = \phi_1 z_t + \phi_2 z_{t-1} + \phi_3 z_{t-2} + 0 - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t-1}$$

$$\hat{z}_t(2) = \phi_1 \hat{z}_t(1) + \phi_2 z_t + \phi_3 z_{t-1} + 0 - 0 - \theta_2 a_t$$

$$\hat{z}_t(3) = \phi_1 \hat{z}_t(2) + \phi_2 \hat{z}_t(1) + \phi_3 z_t + 0 - 0 - 0$$

$$\hat{z}_t(4) = \phi_1 \hat{z}_t(3) + \phi_2 \hat{z}_t(2) + \phi_3 \hat{z}_t(1) + 0 - 0 - 0$$

$$\vdots$$

Pronóstico a partir de un Modelo *ARIMA*

- Para un modelo *ARI* los predictores se calculan recursivamente hacia el futuro.
- Cuando el modelo tiene componentes *MA* , el calculo se inicia ab aeterno. En la práctica en el pasado remoto: *t-h* , cuando se puede despreciar $a_{t\text{-}h}$, no por pequeño sino porque casi no influye sobre el presente.

$$
\begin{aligned}
&\hat{z}_{t-1}(1) = \mathfrak{E}_t z_t = z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \phi_3 z_{t-3} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \\
&\hat{z}_{t-2}(1) = \mathfrak{E}_t z_{t-1} = z_{t-1} = \phi_1 z_{t-2} + \phi_2 z_{t-3} + \phi_3 z_{t-4} + a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2} - \theta_2 a_{t-3} \\
&\vdots \\
&\hat{z}_{t-h}(1) = \mathfrak{E}_t z_{t-h+1} = z_{t-h+1} = \phi_1 z_{t-h} + \phi_2 z_{t-h-1} + \phi_3 z_{t-h-2} + a_{t-h+1} - \theta_1 a_{t-h} - \theta_2 a_{t-h-1} \\
&\hat{z}_{t-h-1}(1) = \mathfrak{E}_t z_{t-h} = z_{t-h} = \phi_1 z_{t-h-1} + \phi_2 z_{t-h-2} + \phi_3 z_{t-h-3} + a_{t-h} - \theta_1 a_{t-h-1} - \theta_2 a_{t-h-2}
\end{aligned}
$$

- Asumiendo $\forall j \geq h+1 : a_{t-j} \cong 0$ se pueden estimar $a_{t-h} \ldots a_t$ a partir de estas h+1 ecuaciones recursivamente empezando de la ultima.

$$
a_{t-h} = z_{t-j} - \phi_1 z_{t-j-1} + \phi_2 z_{t-j-2} + \phi_3 z_{t-j-3} + \theta_1 a_{t-j-1} + \theta_2 a_{t-j-2} \qquad j = h, h-1 \ldots 0
$$

Pronóstico a partir de un Modelo *ARIMA*

- Con las $a_{t-h} \ldots a_t$ se pueden calcular los pronósticos: $\hat{z}_t(l)$
- Sólo se usan: $a_t \ldots a_{t-q-1}$

- Bandas de pronostico:

$$\boxed{\begin{aligned} & z_{t+l} : \quad \hat{z}_t(l) \pm z_{1-\alpha/2}\hat{\sigma}_{z_{t+l}} \\ & \hat{\sigma}_{z_{t+l}} = (1+\hat{\psi}_1^2 + \ldots + \hat{\psi}_{l-1}^2)\hat{\sigma}^2 \end{aligned}}$$