



UNIVERSIDAD DEL CEMA

Simulación de Monte Carlo

La simulación como una herramienta para el manejo de la incertidumbre

Fabián Fiorito
ffiorito@invertironline.com

Modelización de incertidumbre en Excel

Análisis de Riesgo (Risk Analysis)

En sentido amplio, análisis del riesgo (risk analysis) implica cualquier método, cualitativo o cuantitativo, para evaluar el impacto del riesgo en la toma de decisiones. Existen numerosas técnicas al respecto, y el objetivo es ayudar a quien debe tomar una decisión a seleccionar un curso de acción, una vez que se comprende mejor los resultados posibles que pueden ocurrir.

Una vez que se reconoce una situación riesgosa, el paso siguiente es **cuantificar el riesgo** que involucra esa situación de incertidumbre.

Cuantificar el riesgo significa determinar todos los valores posibles que una variable riesgosa puede tomar y determinar la probabilidad relativa de cada uno de esos valores.

Una vez que se ha cuantificado el riesgo, es decir, determinado los posibles resultados y la probabilidad respectiva de ocurrencia, se pueden usar **distribuciones de probabilidad** para describir la situación.

Modelos de Simulación

En sentido amplio, se puede definir simulación como el proceso de construir un modelo lógico-matemático de un sistema o proceso de decisión, y experimentar con el modelo para comprender el comportamiento del sistema o ayudar en la toma de decisiones.

Un modelo es inservible si no ayuda al usuario a *comprender el problema*. Por ello, el *punto principal* en la simulación está puesto en *conducir experimentos con el modelo y analizar los resultados*.

Un elemento importante en los procesos de simulación es *identificar las distribuciones de probabilidad apropiadas* para los datos. Esto normalmente requiere analizar información empírica o histórica y ajustarla a alguna distribución. En otros casos, dicha información no se encuentra disponible y quien construye el modelo de simulación debe utilizar su juicio personal para determinar que distribución utilizar.

Enfoque Tradicional

Para el caso en que se construye un modelo pero sin recurrir a la simulación, quien tiene que tomar la decisión, lo hará teniendo en mente el resultado "único" que arroja el modelo (un valor esperado).

La decisión implicará entonces, *contrastar este valor* con algún *parámetro de referencia* o valor mínimo (o máximo) aceptable.

Ahora bien, dado que el valor que arroja el modelo no considera el impacto de la incertidumbre, quien toma la decisión normalmente debe considerar el riesgo involucrado de alguna forma, como por ejemplo: se podría incrementar *arbitrariamente* el mínimo aceptable, o bien se podría estimar (de modo no riguroso) la probabilidad de que el resultado real esté por debajo o arriba del valor esperado que arroja el modelo.

En el mejor de los casos, se podría ampliar el análisis para considerar otros resultados posibles en distintos *escenarios alternativos*, como ser "pesimista" y "optimista" además del "más probable". En este caso, quien toma la decisión deberá ponderar si la probabilidad de los escenarios más probable y optimista es tan buena como para compensar los resultados del escenario pesimista.

Enfoque de Simulación

En el caso de introducir en el modelo un análisis de simulación, los resultados que arroja el modelo en términos de distribuciones de probabilidad, *le brindan a quien debe tomar una decisión un panorama de todos los resultados posibles con sus respectivas probabilidades.*

Esto representa un avance muy significativo respecto del enfoque "pesimista-más probable-optimista". Cabe mencionar que las distribuciones de probabilidad van más allá del simple hecho de llenar el vacío que existe entre estos tres valores:

- Se orientan a determinar un rango "correcto" de valores dado que la incertidumbre asociada con cada variable que alimenta al modelo debe ser definida más rigurosamente.
- Muestra la probabilidad de ocurrencia, es decir, cuantifica el grado o la chance de que ocurra cada uno de los resultados posibles.
- Además, permite estudiar la interdependencia de las variables aleatorias que consideramos críticas en nuestro modelo a través del análisis de las covarianzas y correlaciones entre las distintas variables tanto aquellas que alimentan el modelo (inputs) como las que son el producto final (outputs) del modelo.

Distribuciones de Probabilidad

Variable aleatoria y distribuciones de probabilidad

Variable Aleatoria



Una variable aleatoria es un evento numérico cuyo valor se determina mediante un proceso al azar.

Cuando se asignan valores de probabilidad a todos los valores numéricos posibles de una variable aleatoria X



se obtiene

Distribución de Probabilidad

La suma de las probabilidades para todos los resultados numéricos posibles debe ser igual a 1.

Discretas

Continuas

Elección de una distribución que se ajuste a los inputs del modelo

1) Cuando existe información empírica

Para muchos inputs de un modelo de simulación podría existir información empírica disponible, a través de registros históricos o recopilada especialmente al efecto.

Este enfoque tiene sus desventajas. Por un lado, la información histórica podría no representar adecuadamente la verdadera población debido a un error de muestreo. Adicionalmente, el uso de información empírica impide el uso de valores fuera del rango original de la información.

2) Cuando no existe información disponible

En el caso de que no exista información disponible, todo queda librado al juicio de quien construye el modelo en cuanto a seleccionar la distribución adecuada a utilizar para modelizar el comportamiento de cierta variable aleatoria que sirva de input al modelo.

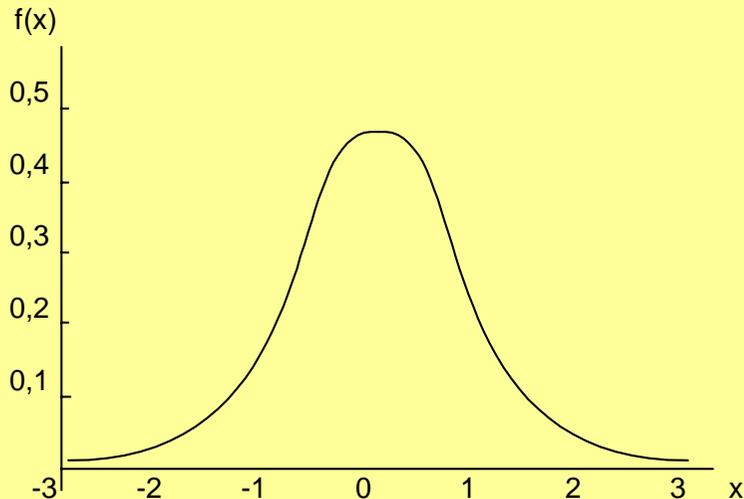
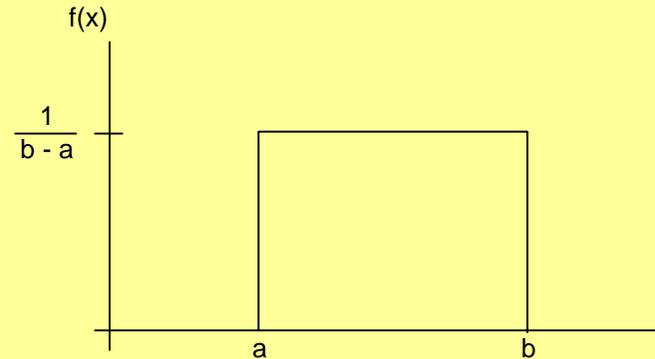
Es por ello que un conocimiento de las distintas alternativas de distribuciones que se pueden utilizar resulta tan valioso.

Distribuciones de Probabilidad más usadas

Distribución Uniforme

Se caracteriza por el hecho de que todos los resultados posibles entre un cierto mínimo y máximo son igualmente probables.

La distribución uniforme se utiliza cuando hay muy poca información disponible respecto de la variable aleatoria, los parámetros mínimo y máximo se fijan para reflejar la mejor estimación del rango de valores que puede tomar la variable aleatoria.



Distribución Normal

Se caracteriza por su forma acampanada. Es simétrica y tiene la propiedad de que la mediana, el modo y la media aritmética coinciden.

A pesar de que no es cerrada, la mayor densidad está cercana a la media. Se caracteriza por dos parámetros: **la media, μ** (parámetro de ubicación) y **la varianza σ^2** (parámetro de escala).

Existe un caso particular de esta distribución, la distribución normal standard, con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Distribuciones de Probabilidad más usadas

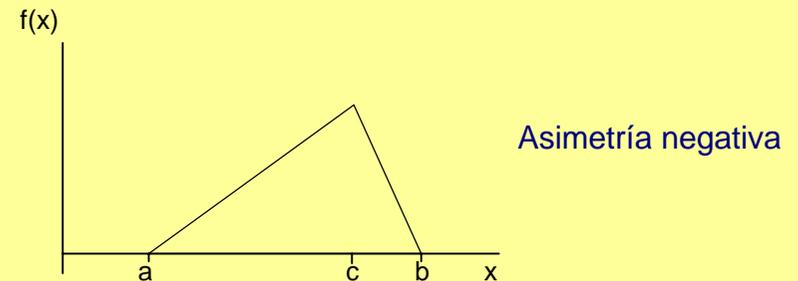
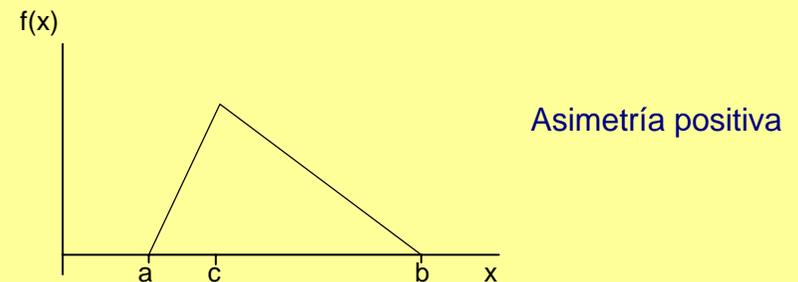
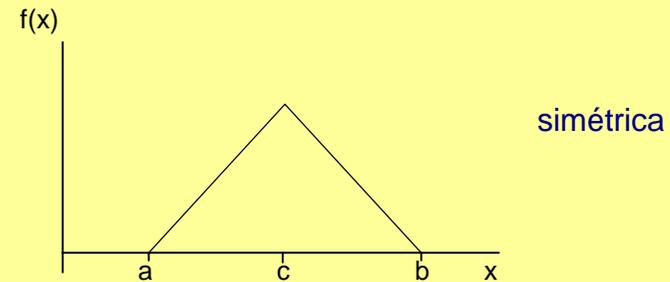
Distribución Triangular

Se define por tres parámetros: **el mínimo a , el máximo b , y el valor más probable c** . Variando la posición del valor más probable con relación a los extremos, la distribución puede ser simétrica o no.

La distribución triangular se usa usualmente como una aproximación de otras distribuciones, como la normal, o ante la ausencia de información más completa.

Dado que depende de tres parámetros simples y puede tomar una variedad de formas, es muy flexible para modelizar una amplia variedad de supuestos.

Una característica importante es que es cerrada, eliminando la posibilidad de valores extremos que quizás podrían ocurrir en la realidad.



Simulación de Monte Carlo

¿Qué es la Simulación de Monte Carlo?

- Es una técnica que combina *distribuciones de probabilidades*,
- Su nombre deriva de la ciudad homónima en la que son populares los juegos de azar
- Utiliza generación de números aleatorios en vez de cálculos analíticos
- Se aplicó por primera vez alrededor de 1947 pero su aplicación era muy limitada debido a que requería mucho tiempo
- Se ha popularizado últimamente debido a la potencia de las computadoras personales que permiten efectuar las “corridas” en segundos

Un ejemplo de Aplicación

- El siguiente ejemplo fue tomado de una presentación preparada por David. M. Haasenzahl denominada “Monte Carlo Analysis” y se ha simplificado a efectos didácticos
- Haasenzahl en su presentación analiza el caso de un aditivo utilizado en la producción de cremas para la piel y la posibilidad de que el mismo resulte irritante
- Presenta los siguientes datos observados:
 - Varias muestras de crema proporcionan la siguiente información sobre el agente irritante:
 - Media 0,02 mg
 - Desviación estándar 0,005 mg
 - Dos test muestran la probabilidad de irritación una vez que se aplicó la crema:
 - “Low freq. Of effect” por mg exposición = 5/100/mg
 - “High freq. Of effect” por mg exposición = 10/100/mg

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

- **Resultados Analíticos**

$$\text{Risk} = \text{exposure} \times \text{potency}$$

Estimación usando la media

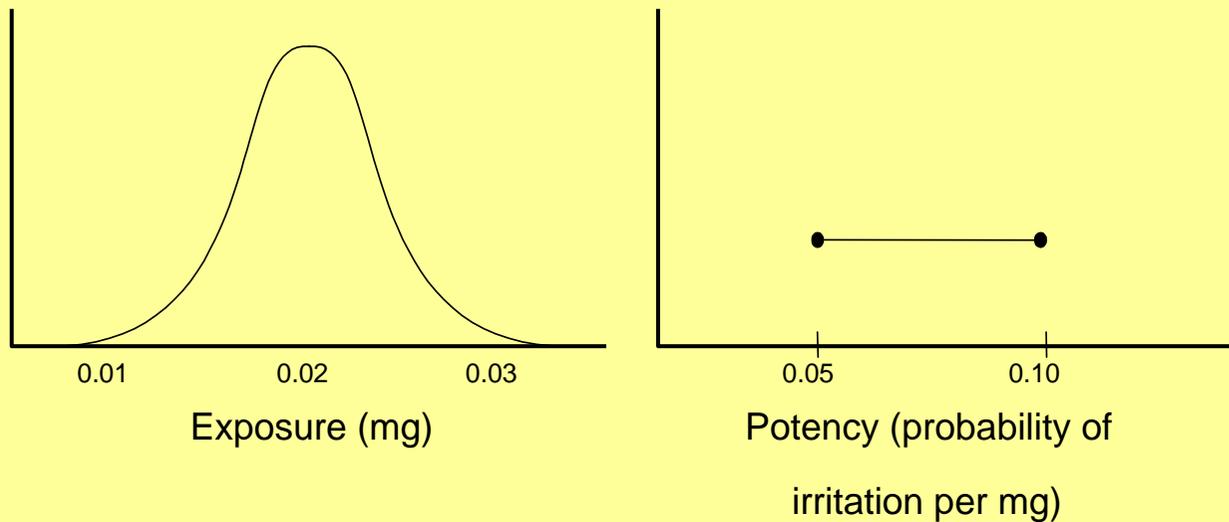
- Mean risk = $0,02 \text{ mg} \times 0,075 / \text{mg} = 0.0015$
- *O dicho de otro modo, 15 de cada 10.000 aplicaciones resultarán en irritación.*

Estimación “conservadora”: usamos el percentil del 95% superior

- Risk = $0.03 \text{ mg} \times 0.0975 / \text{mg} = 0.0029$
- *En este caso, 29 de cada 10.000 aplicaciones resultarán en irritación.*

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

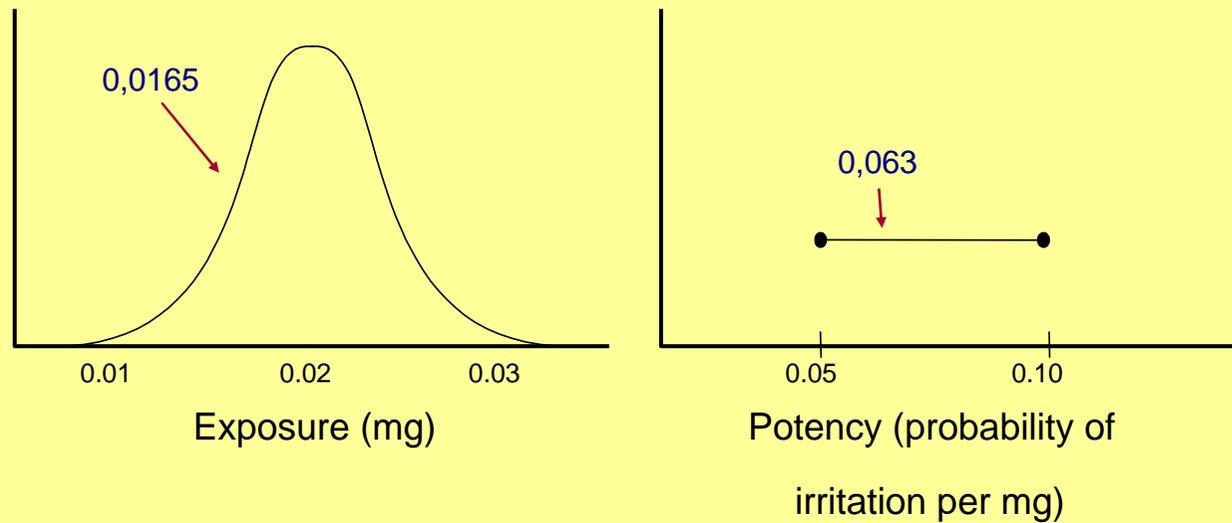
- Ejemplo gráfico usando Monte Carlo



- Exposure = Normal (media 0.02 mg, desv. estandar = 0.005 mg)
- Potency = Uniform (rango 0.05 / mg a 0.10 / mg)

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

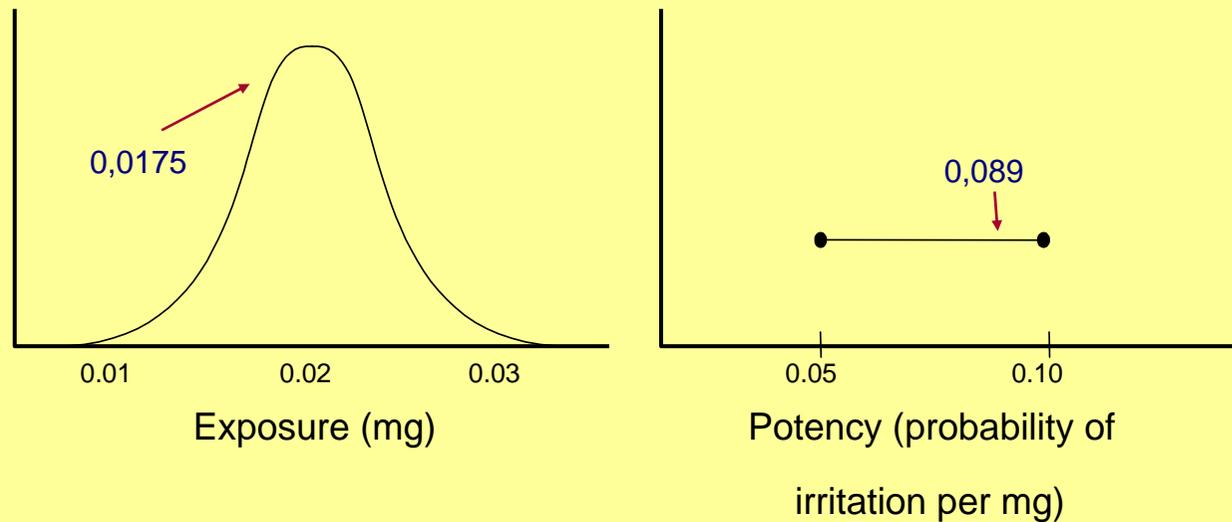
- Primera corrida...



- $p(\text{irritación}) = 0,0165 \text{ mg} \times 0,063/\text{mg} = 0,0010$

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

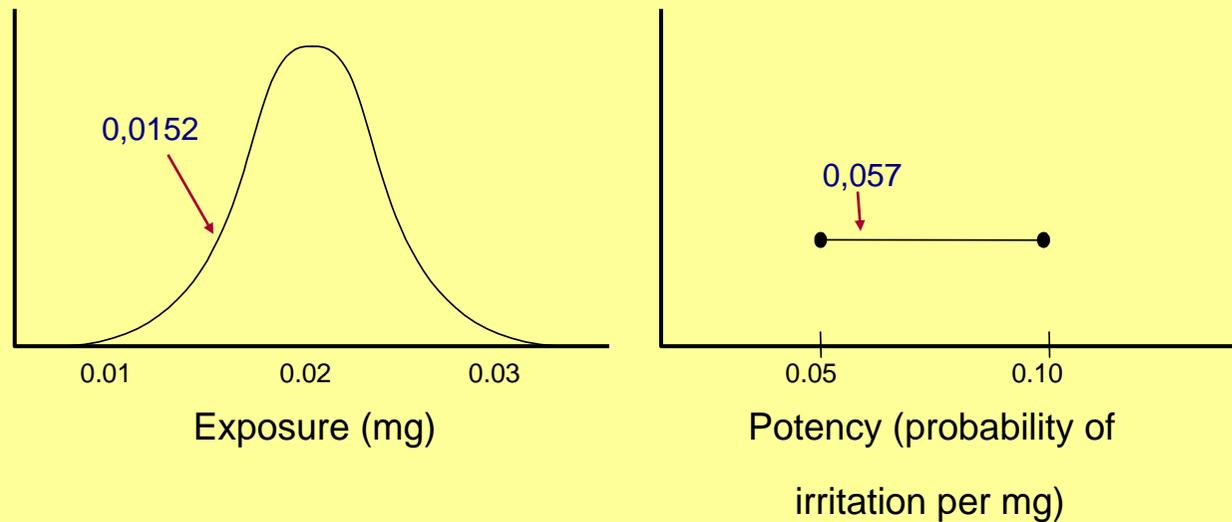
- Segunda corrida...



- $p(\text{irritación}) = 0,0175 \text{ mg} \times 0,089/\text{mg} = 0,0016$
- Resumen de corridas { 0,0010 , 0,0016 }

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

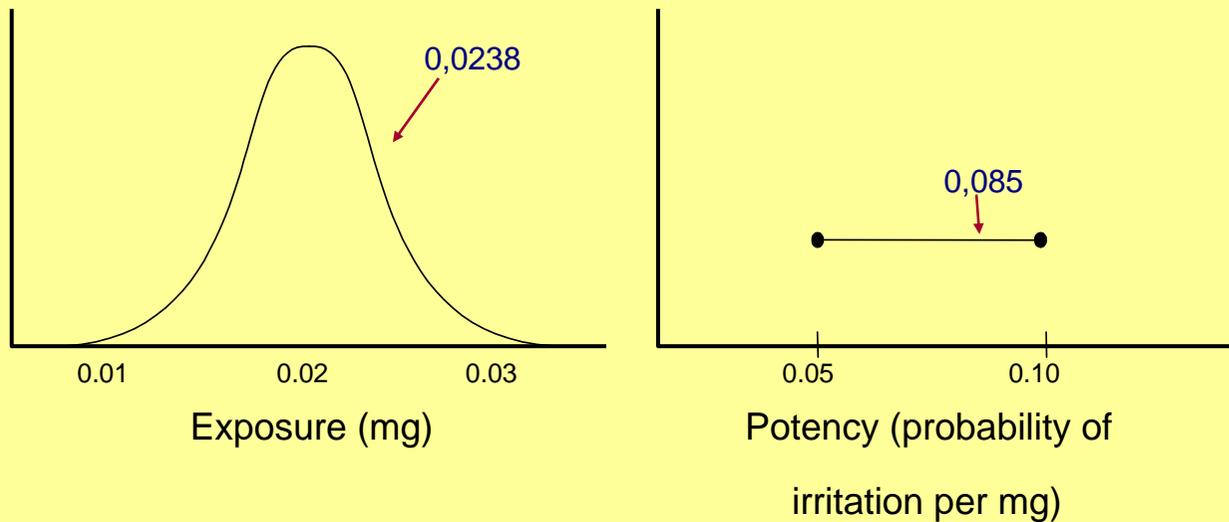
- Tercera corrida...



- $p(\text{irritación}) = 0,0152 \text{ mg} \times 0,057/\text{mg} = 0,00087$
- Resumen de corridas { 0,0010 , 0,0016 , 0,00087 }

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

- Cuarta corrida...



- $p(\text{irritación}) = 0,0238 \text{ mg} \times 0,085/\text{mg} = 0,0020$
- Resumen de corridas { 0,0010 , 0,0016 , 0,00087 , 0,0020 }

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

- Luego de 10 corridas...

- Resumen de corridas:

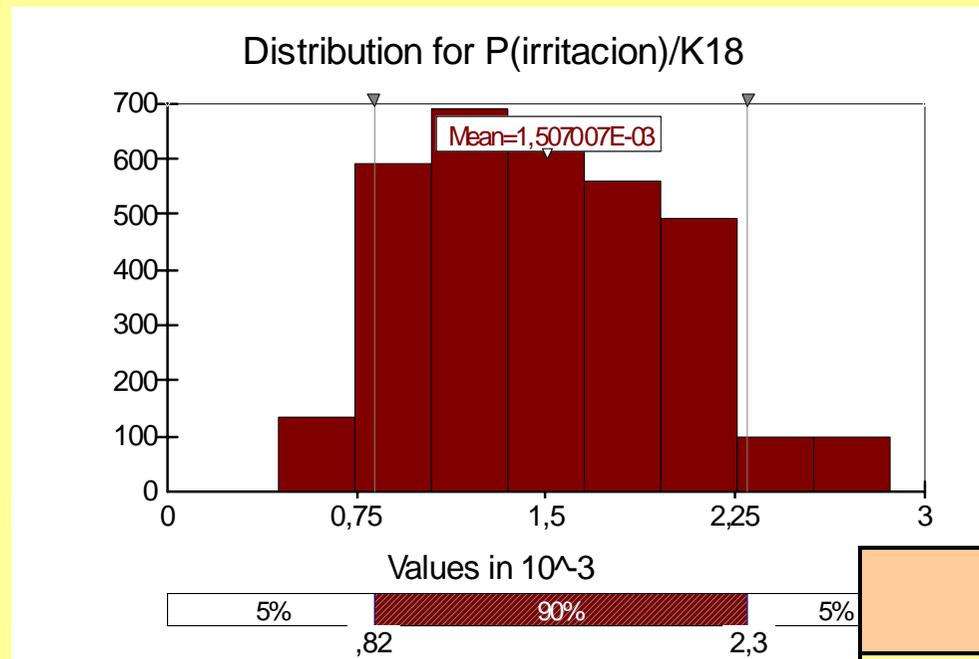
- { 0,0010 , 0,0016 , 0,00087 , 0,0020 , 0,0011 , 0,0018 , 0,0024 , 0,0016, 0,0015 , 0,00062 }

- Media = 0,00145

- Desviación estándar = 0,00055

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

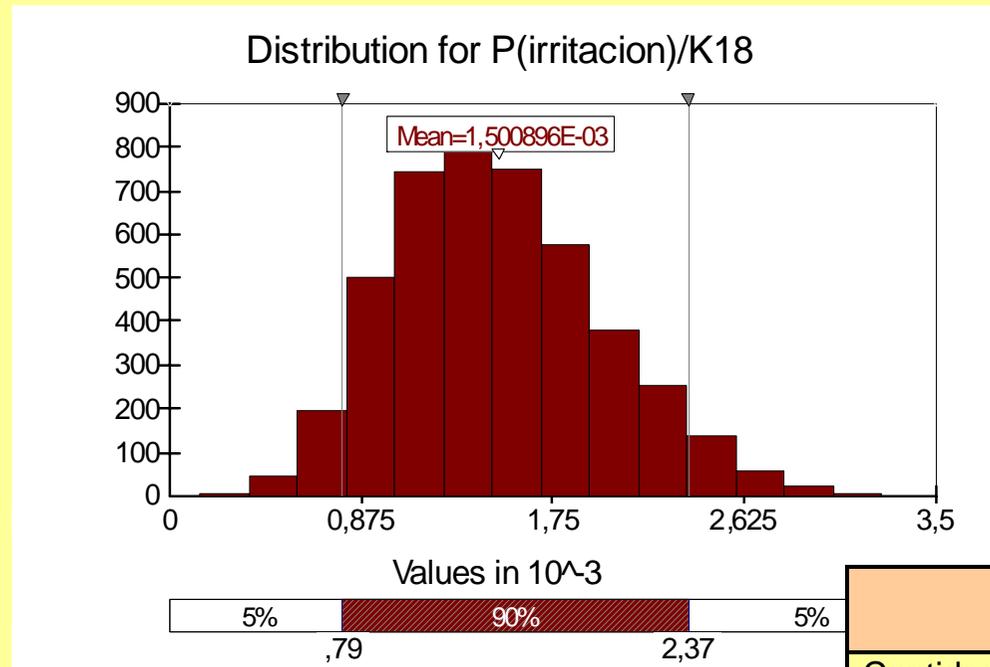
- Resultados obtenidos luego de 100 corridas...



	Monte Carlo	Resultados Analíticos
Cantidad iteraciones	100	N/A
Tiempo requerido	0:00:02	N/A
Media	0,00151	0,00150
Desv. Estandar	0,00050	N/D
Estim. "conservadora"	0,00230	0,00290

Un ejemplo de Aplicación (cont.)

- Resultados obtenidos luego de 10000 corridas...



	Monte Carlo	Resultados Analíticos
Cantidad iteraciones	10.000	N/A
Tiempo requerido	0:00:26	N/A
Media	0,00150	0,00150
Desv. Estandar	0,00048	N/D
Estim. "conservadora"	0,00237	0,00290

Algunas cuestiones a tener en cuenta

- **Determinar cuáles son las variables “clave” a los efectos de simular su comportamiento (normalmente no son más de 5 a 10)**
- **Describir el comportamiento de dichas variables con distribuciones de probabilidades que sean adecuadas (si la distribución elegida es inválida, los resultados serán incorrectos)**
- **Analizar correlación entre las variables (evitar que se corran escenarios “de laboratorio”)**

Aplicaciones

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- **El Sr. Cansado llega al día de su retiro y cuenta con la siguiente información:**
 - **Capital Acumulado US\$1,000,000**
 - **Edad actual 65 años**
 - **Monto anual a retirar US\$60,000**
 - **Retorno esperado sobre las inversiones 10%**
 - **Inflación esperada en dolares 3%**
 - **Expectativa de vida 87 años**
 - **Sin requisitos respecto a herencia**
- **Su asesor de inversiones hace algunos cálculos en la computadora y le imprime una proyección al Sr. Cansado:**

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- **Proyección para el Sr. Cansado:**

- **A los 87 años debería tener un fondo acumulado de casi US\$2,3 millones**
- **Habiendo retirado los US\$ 60k por año ajustados por una inflación esperada del 3%**
- **Y suponiendo retornos promedio del 10% para sus inversiones**

Año	Rend.	Saldo Inicial	Retiros	Saldo Final
	%	US\$	US\$	US\$
1	10%	1.000.000	60.000	1.034.000
2	10%	1.034.000	61.800	1.069.420
3	10%	1.069.420	63.654	1.106.343
4	10%	1.106.343	65.564	1.144.857
5	10%	1.144.857	67.531	1.185.059
6	10%	1.185.059	69.556	1.227.053
7	10%	1.227.053	71.643	1.270.951
8	10%	1.270.951	73.792	1.316.874
9	10%	1.316.874	76.006	1.364.955
10	10%	1.364.955	78.286	1.415.335
11	10%	1.415.335	80.635	1.468.170
12	10%	1.468.170	83.054	1.523.628
13	10%	1.523.628	85.546	1.581.890
14	10%	1.581.890	88.112	1.643.156
15	10%	1.643.156	90.755	1.707.641
16	10%	1.707.641	93.478	1.775.579
17	10%	1.775.579	96.282	1.847.226
18	10%	1.847.226	99.171	1.922.861
19	10%	1.922.861	102.146	2.002.786
20	10%	2.002.786	105.210	2.087.333
21	10%	2.087.333	108.367	2.176.863
22	10%	2.176.863	111.618	2.271.770

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- Pasan 10 años y el Sr. Cansado vuelve a ver a su asesor de inversiones para ver como vienen las cosas y se da con la triste noticia de que la proyección no se cumplió en la realidad y que hay unas desviaciones importantes:

- Los rendimientos reales de sus inversiones son los que se muestran en la tabla y curiosamente, el promedio esperado del 10% SI se cumplió

Año	Rend. %
1	-20%
2	-10%
3	9%
4	8%
5	12%
6	-10%
7	-2%
8	25%
9	27%
10	61%
Promedio	10%

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- Pero el monto del fondo a la fecha es de US\$ 501k y nos los US\$ 1,4 millones que se habían proyectado originalmente...

Año	Rend. %	Retiros US\$	Saldo Final US\$	Saldo Proyectado
1	-20%	60.000	752.000	1.034.000
2	-10%	61.800	621.180	1.069.420
3	9%	63.654	607.703	1.106.343
4	8%	65.564	585.511	1.144.857
5	12%	67.531	580.138	1.185.059
6	-10%	69.556	459.523	1.227.053
7	-2%	71.643	380.123	1.270.951
8	25%	73.792	382.913	1.316.874
9	27%	76.006	389.771	1.364.955
10	61%	78.286	501.491	1.415.335

- Qué paso? Por qué no se cumplió la proyección si se respetaron los supuestos?

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- Qué hubiese pasado si los mismos retornos ocurrían pero en orden inverso?
- Entró en juego el valor tiempo del dinero al producirse los retiros anuales
- y teniendo en cuenta que los primeros años se experimentaron retornos negativos el Sr. Cansado tuvo menos fondos en su portafolio...

Año	Rend. %	Retiros US\$	Saldo Final US\$	Saldo Proyectado
1	61%	60.000	1.513.400	1.034.000
2	27%	61.800	1.843.532	1.069.420
3	25%	63.654	2.224.848	1.106.343
4	-2%	65.564	2.116.098	1.144.857
5	-10%	67.531	1.843.711	1.185.059
6	12%	69.556	1.987.053	1.227.053
7	8%	71.643	2.068.643	1.270.951
8	9%	73.792	2.174.387	1.316.874
9	-10%	76.006	1.888.542	1.364.955
10	-20%	78.286	1.448.205	1.415.335

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- Dados los retornos reales, veamos que hubiese pasado si no se hubiesen producido los retiros...

Evolución Portafolio - SIN retiros

Año	Rend. %	Retiros US\$	Saldo Final US\$
1	-20%	-	800.000
2	-10%	-	720.000
3	9%	-	784.800
4	8%	-	847.584
5	12%	-	949.294
6	-10%	-	854.365
7	-2%	-	837.277
8	25%	-	1.046.597
9	27%	-	1.329.178
10	61%	-	<u>2.139.976</u>

Evolución Portafolio - SIN retiros - Ret. Invertidos

Año	Rend. %	Retiros US\$	Saldo Final US\$
1	61%	-	1.610.000
2	27%	-	2.044.700
3	25%	-	2.555.875
4	-2%	-	2.504.758
5	-10%	-	2.254.282
6	12%	-	2.524.796
7	8%	-	2.726.779
8	9%	-	2.972.189
9	-10%	-	2.674.970
10	-20%	-	<u>2.139.976</u>

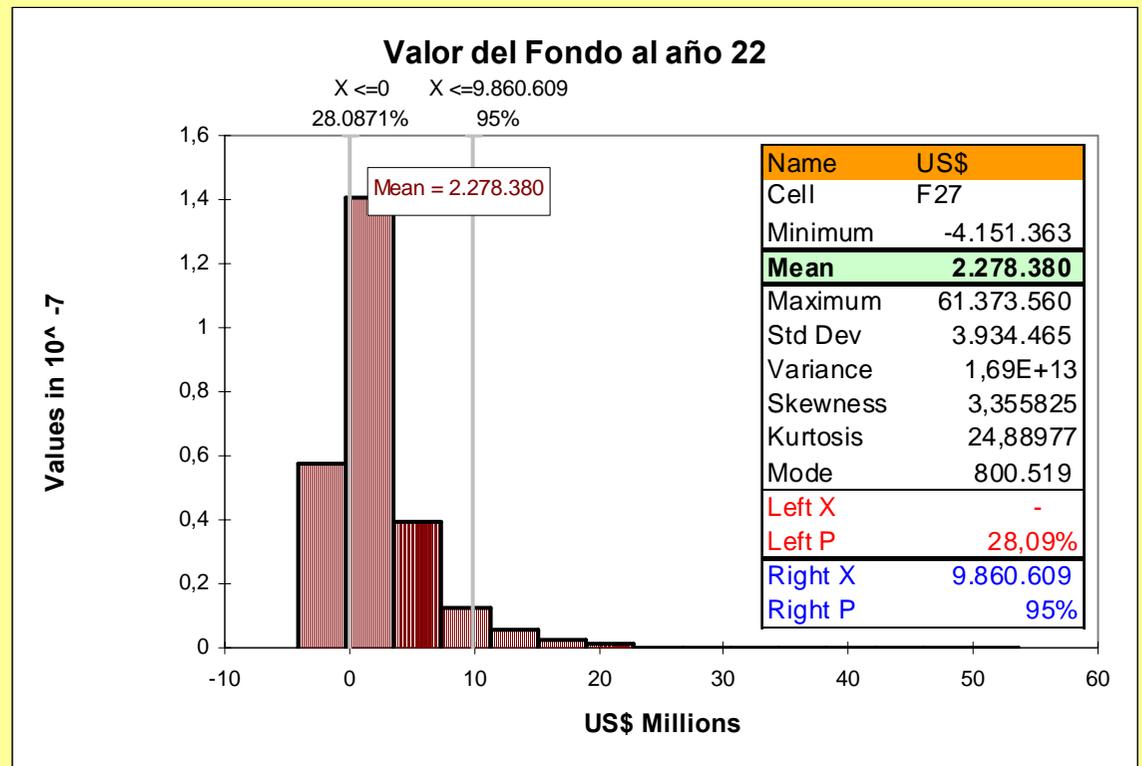
- Hubiese dado lo mismo en cualquier caso porque el retorno promedio fue del 10% en ambos casos.

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- **Conclusión:**
 - No es lo mismo promediar un 10% de retorno anual a lo largo del período que conseguir un retorno del 10% anual en cada año
- Aquí es donde la Simulación de Monte Carlo puede ayudarnos ya que nos permite pensar en términos de “probabilidades” y no de “certeza” para los retornos...

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

Año	Rend. %	Saldo Inicial US\$	Retiros US\$	Saldo Final US\$
1	10%	1.000.000	60.000	1.034.000
2	10%	1.034.000	61.800	1.069.420
3	10%	1.069.420	63.654	1.106.343
4	10%	1.106.343	65.564	1.144.857
5	10%	1.144.857	67.531	1.185.059
6	10%	1.185.059	69.556	1.227.053
7	10%	1.227.053	71.643	1.270.951
8	10%	1.270.951	73.792	1.316.874
9	10%	1.316.874	76.006	1.364.955
10	10%	1.364.955	78.286	1.415.335
11	10%	1.415.335	80.635	1.468.170
12	10%	1.468.170	83.054	1.523.628
13	10%	1.523.628	85.546	1.581.890
14	10%	1.581.890	88.112	1.643.156
15	10%	1.643.156	90.755	1.707.641
16	10%	1.707.641	93.478	1.775.579
17	10%	1.775.579	96.282	1.847.226
18	10%	1.847.226	99.171	1.922.861
19	10%	1.922.861	102.146	2.002.786
20	10%	2.002.786	105.210	2.087.333
21	10%	2.087.333	108.367	2.176.863
22	10%	2.176.863	111.618	2.271.770



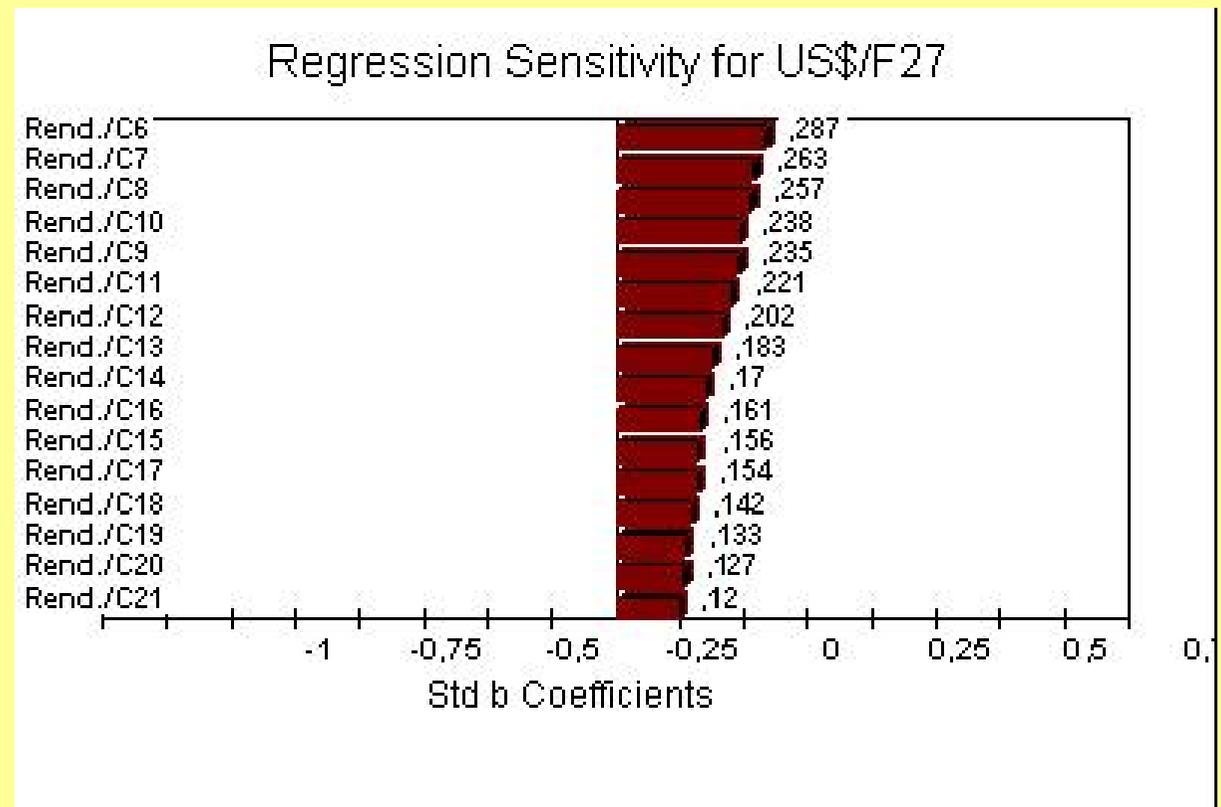
- **Asumiendo 10% de retorno con una normal y desviación estándar del 17%, hay casi un 72% de probabilidad de que los fondos del Sr. Cansado alcancen para hacer sus retiros planeados.**

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- Si la tasa de éxito del 72% no resulta cómoda, el Sr. Cansado puede:
 - Incrementar el retorno esperado? No depende completamente de él... (relación riesgo-retorno)
 - Bajar el nivel de sus retiros. Esto si depende de él, por ejemplo, con retiros de US\$ 54k sus chances de éxito suben a casi 80% y con retiros de US\$ 42k la tasa de éxito es del 93%
- Hay un trade-off entre riesgo y retorno con respecto a los retiros. El riesgo es la **probabilidad de éxito** con la que se siente cómodo el Sr. Cansado. El retorno es el **monto de los retiros**.
- Una tasa de éxito mayor equivale a menores retiros
- Asimismo, una tasa de éxito mayor trae también aparejada una mayor chance de dejar herencia al morir el Sr. Cansado. En otras palabras, El Sr. Cansado puede estar sacrificando su estilo de vida en pos de una tasa de éxito mayor.

Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- Malos retornos en los primeros años afectarían bastante al portafolio...
- En un análisis de sensibilidad respecto del valor del portafolio al año 22 se observa claramente el mayor peso relativo de los retornos en los primeros años



Ejemplo – Planificación de Inversiones usando Simulación

- **También se podrían simular otras variables además de los retornos:**
 - **Expectativa de vida del Sr. Cansado**
 - **Inflación**

Software de Simulación

Software para Simulación

- **Software gratuito desarrollado por José Varela:**
- **<http://www.cema.edu.ar/u/jvarela/simulacion.htm>**

- **Software Comercial**
- **@Risk (<http://www.palisade-ita.com/risk/>)**
- **Crystal Ball (<http://www.oracle.com/crystalball/index.htm>)**